Elektry-
-czność
i
Magnetyzm

1

1959

LUDWIK SILBERSTEIN
Docent Fizyki matemat. w Uniwersytecie Rzymskim.

ELEKTRYCZNOŚĆ
I
MAGNETYZM

Wykład Teoretyczny, poprzedzony Wstępem
o Algebrze i Analizie Wektorów.

Tom I.

BIBLIOTEKA AKADEMII TECHNIKI GDAŃSKIEJ
L.P. 4200
Nr. inw. 437/4

WARSZAWA
Nakładem Księgarni E. Wende i S-ka
(T. Hiż i A. Turkuł.)
1908.

II 50877

POLITECHNIKA GDAŃSKA Biblioteka Główna

Czcionkami Drukarni Naukowej, Warszawa, Hoża 60.

D1R/74/58

Przy uwzględnieniu najistotniejszych tylko punktów teoryi zjawisk elektromagnetycznych, materyał okazał się już tak obfitym, iż należało książkę na dwa podzielić tomy. Z tych jednak sam pierwszy, a nawet już bez Rozdziałów IV i V, stanowi pewną zaokrągloną całość, a mianowicie *ogólną* część przedmiotu. Plan i zawartość tego tomu znajdzie czytelnik na następnych stronicach, w „*Treści*“, skąd też zobaczy, że od Rozdziału IV zaczynają się wywody bardziej specyalne.

Tom drugi będzie poświęcony głównie *falom elekromagnetycznym* czyli, ogólniej, takim stanom pola, których nie można już uważać za „niemal stateczne” (jak w Rozdz. V). Od stanów równowagi lub niemal-równowagi, rozważonych na końcu niniejszego tomu, wrócimy tedy znowu do ogólnych równań różniczkowych pola zmiennego, podanych w Rozdz. II i III. Omówimy *fale w próżni* nieograniczonej oraz *w okolicy doskonałych przewodników*, następnie fale *w izolatorach lub półprzewodnikach* dowolnych, lecz nieruchomych i bez uwzględnienia dyspersyi — na początek. Tu będzie też miejsce dla wyłożenia zasad *elektromagnetycznej teoryi światła*, monochromatycznego. Kilku wybitniejszym teoryom *dyspersyi*, czyli rozszczepienia światła i w ogóle fal krótkich w ciałach ważkich, poświęcimy osobny rozdział. Podamy też *magneto- i elektrooptykę*, lecz w ogólnych tylko zarysach, aby tem więcej miejsca poświęcić nowoczesnym teoryom zjawisk elektromagnetycznych *w ciałach ruchomych;* tu należą też *prądy konwekcyjne* elektryczne, którym szczególną poświęcimy uwagę.

Modnej obecnie *teoryi elektronów* nie uważałem za stosowne wcielić do zasad ogólnych wyłożonych w pierwszym tomie;

w drugim natomiast wypadnie nam zająć się dość szczegółowym przeglądem kilku ważniejszych teoryj atomistycznych opartych na koncepcyi „elektronu".

Sprawy *wymiarów* wielkości elektromagnetycznych i różnych *układów jednostek* nie mogłem systematycznie omówić w tym tomie; dotknąłem jej zaledwie tu i owdzie. Lukę tę postaram się wypełnić w drugim tomie, wraz z wieloma innemi, w które książka ta niewątpliwie obfituje.

L. S.

Warszawa, w lutym 1908.

TREŚĆ

TOMU PIERWSZEGO.

WSTĘP.

Algebra i analiza wektorów.

str

Wektory i skalary. Kierunek i natężenie wektora. Wektory jednostkowe. Dodawanie i odejmowanie wektorów. Iloczyn skalarny. Iloczyn wektorowy. Układ prawoskrętny wektorów jednostkowych. Iloczyn skalarno-wektorowy trzech wektorów; objętość równoległościanu. Iloczyn wektorowo-wektorowy 5

Operator wektorowy liniowy. Osie główne. Operator symetryczny. Operator jednoosiowy 16

Pole wektorowe. Różniczkowanie wektorów ze względu na czas. Nieskończony szereg wektorów 22

Własności przestrzenne pola. Linie i rurki pola wektorowego. Całka liniowa. Twierdzenie Stokes'a; *curl* wektora. Całka powierzchniowa; rozbieżność czyli *div* wektora. Skok składowej normalnej. Określenie pola solenoidalnego. Moment rurki. Wiry pola wektorowego. Rurki jednostkowe. Określenie pola irotacyjnego. Dziedziny acykliczne. Potencyał skalarny jednowartościowy. Dziedziny cykliczne; potencyał wielowartościowy; cykle niezależne; diafragmy; skok potencyału. Powierzchnie izopotencyalne. Operator Hamiltona ∇ w zastosowaniu do skalara. ∇ w zastosowaniu do wektora; *div* i *curl*; niezależność od układu spółrzędnych. ∇ w zastosowaniu do sum dowolnych i do iloczynów skalarnych. Wzory dla *div* i *curl*'a iloczynu wektorowego. Operator $\mathfrak{n}\nabla$. Zmiany lokalne i zmiany indywidualne; równanie różniczkowe ruchu płynu; „równanie ciągłości". Iteracye operatora ∇; operator Laplace'a; $curl^2$; ogólne własności iteracyj ∇ i $V\nabla$ 25

Określenie pola przez jego wiry i rozbieżności. Twierdzenie Greena. Uwzględnienie nieciągłości. Pole irotacyjne; wyznaczenie potencyału skalarnego; warstwy podwójne. Pole solenoidalne; potencyał wektorowy; potencyał skalarny nazewnątrz wirów 56

str.

Własności „energii pola R". Energia wzajemna różnych pól. Energia pola irotacyjnego; rola „źródeł" rurek. Energia pola solenoidalnego; rola włókien wirowych. Spółczynniki samoindukcyi i indukcyi wzajemnej 79

ROZDZIAŁ I.

Pojęcia zasadnicze.

§ 1. Siła elektryczna i siła magnetyczna 93
§ 2. Pole elektryczne, magnetyczne, elektromagnetyczne; linie i rurki siły; całki liniowe S. E. M., S. M. M. 93
§ 3. Wiry elektryczne, magnetyczne. Potencyał nazewnątrz wirów. Komórki jednostkowe 95
§ 4. Indukcya (elektryczna, magnetyczna) przez powierzchnię w próżni 96
§ 5. Spółczynnik dielektryczny (K) i przenikliwość magnetyczna. Załamanie linii siły. Ciała para- i diamagnetyczne. Ciała jednorodne i niejednorodne, izotropowe i krystaliczne; osie elektryczne, magnetyczne 97
§ 6. Polaryzacya elektryczna, magnetyczna. Indukcya przez powierzchnię dowolną. Elektryczność prawdziwa; gęstość przestrzenna i powierzchniowa. Magnetyzm prawdziwy nie istnieje 101
§ 7. Elektryczność pozorna; magnetyzm pozorny 105
§ 8. Dielektryki, izolatory. Określenie statyczne przewodników 107
§ 9. Pojęcia prądu magnetycznego i prądu elektrycznego w izolatorach. Środowisko spoczywające. Środowisko ruchome; prąd przesunięcia, prąd konwekcyjny, prąd Röntgena. Solenoidalność prądu całkowitego 109
§ 10. Ogólne określenie przewodników i prądu elektrycznego. Spółczynnik przewodnictwa (λ); prąd przewodzony. Wymiary $K : \lambda$. 114

ROZDZIAŁ II.

Maxwellowskie równania różniczkowe pola elektromagnetycznego.

§ 11. Postać całkowa dwóch zasadniczych związków elektromagnetycznych. Postać różniczkowa 121
§ 12. Równania różniczkowe dla izolatora doskonałego, nieruchomego 125
§ 13. Wymiary stałej „uniwersalnej" c 126
§ 14. Ładunek prawdziwy jako niezmiennik elementarny. Inny niezmiennik (warunkowy) całego pola 127
§ 15. Jednoznaczność rozwiązań przy danych warunkach początkowych i granicznych 131
§ 16. Superpozycya całek równań elektromagnetycznych . . 132
§ 17. Warunki graniczne dla dwóch izolatorów doskonałych 135

str.

§ 18—20. Równania różniczkowe dla półprzewodnika nieruchomego. Czas relaksacyjny. Los poprzednio rozważonych niezmienników dzięki „przewodnictwu“. Ciepło Joule'a. Własność superpozycyi 137
§ 21. Warunki graniczne dla dwóch półprzewodników, dla dwóch „dobrych“ przewodników, dla przewodnika i izolatora . . . 140
§ 22—24. Równania różniczkowe dla izolatora doskonałego ruchomego. Ładunek elektryczny jako niezmiennik indywidualny. Superpozycya 144
§ 25. Równania dla półprzewodnika ruchomego 146

Całki symboliczne dla środowiska nieruchomego.

§ 26—31. Całki symboliczne dla izolatora izotropowego, jednorodnego. Kilka twierdzeń szczególnych. Niezmienność pól irotacyjnych; pojęcie „epoki“. Zastosowanie całek ogólnych do pewnych stanów początkowych, dla których zawiłe operatory stają się zwykłemi funkcyami trygonometrycznemi. Wzmianka o rozchodzeniu się zaburzeń 147
§ 32. Całki symboliczne dla półprzewodnika izotropowego, jednorodnego. Zastosowanie do pola irotacyjnego 156

ROZDZIAŁ III.

Energia i siły ponderomotoryczne.

Uwagi ogólne i przykłady.

§ 33. Kilka słów o energii 165
§ 34—35. Lokalizacya energii; uwagi wstępne. Energia kinetyczna ciał sztywnych i odkształcalnych, szczególniej płynów; różne postacie wyrazu energii 166
§ 36. Lokalizacya ciepła 172
§ 37. Energia „położenia wzajemnego“, szczególniej energia grawitacyjna. Lokalizacya formalna a lokalizacya fizyczna. Wzmianka o energii chemicznej 173

Energia elektromagnetyczna.

§ 38. Energia elektryczna w dielektryku izotropowym . . . 179
§ 39. Dielektryk krystaliczny 182
§ 40. Energia magnetyczna 183
§ 41. Energia elektromagnetyczna dowolnego pola 185
§ 42—43. Prąd energii elektromagnetycznej w izolatorze nieruchomym i w takimże półprzewodniku 186

Siły ponderomotoryczne.

§ 44. Uwagi wstępne; powrót do określenia siły elektrycznej. Działanie mechaniczne pola elektrycznego 189

str.

§ 45. Wyprowadzenie wzoru dla siły ponderomotorycznej **P** z wyrazu energii pola elektromagnetycznego dowolnego, oparte na założeniu niezmienności „ładunków indywidualnych“ podczas przesunięcia wirtualnego 192
§ 46. Połączenie powyższego wzoru z równaniami różniczkowemi Maxwellowskiemi: omówienie poszczególnych wyrazów siły **P** 196
§ 47. Wzmianka tymczasowa o „siłach przyłożonych“ elektrycznych i magnetycznych 198
§ 48. Siła **P** w izolatorze nieruchomym jednorodnym, pozbawionym ładunku; dodatkowy warunek izotropii; uwagi dotyczące próżni lub „eteru“. 198
§ 49. Siła **P** i moment **L** pary sił w ciele krystalicznem . . 199

Wysił elektromagnetyczny.

§ 50. Faraday, Maxwell. 204
§ 51—52. Wysił w ogóle. Wysiły sprzężone. Wysił irotacyjny. Związki ogólne 205
§ 53. Osie główne wysiłu; napięcia główne. Wysił irotacyjny. Wysił symetryczny. Wysił izotropowy czyli hydrostatyczny . 209
§ 54. Wypadkowa siła i wypadkowy moment danego wysiłu, na jednostkę objętości 212
§ 55. Wysił Maxwellowski: elektryczny, magnetyczny i mieszany 214
§ 56—57. Osie i napięcia główne ogólnego wysiłu elektromagnetycznego. Toż samo przy założeniu izotropii 216
§ 58. Własności wysiłów elektrycznego i magnetycznego, z osobna: a) w krysztale; b) w środowisku izotropowem 221

Siły przyłożone; źródła energii i zaburzeń elektromagnetycznych.

§ 59—60. Uwagi wstępne. Źródła energii i siły przyłożone elektryczne i magnetyczne 223
§ 61. Równania różniczkowe. Prąd energii 225
§ 62. Zależność pola od samych wirów sił przyłożonych. Źródła zaburzeń i źródła energii. Przykłady sił przyłożonych 226
§ 63. Warunki graniczne 228
§ 64. Wyraz siły ponderomotorycznej zmieniony dzięki siłom przyłożonym 229
§ 65 Kilka słów o układach zupełnych i niezupełnych, czyli zakłóconych 230

ROZDZIAŁ IV.

Elektrostatyka i Magnetostatyka.

Pole elektrostatyczne.

§ 66. Własności zasadnicze. Potencyał 235
§ 67. Ładunki elektryczne prawdziwe i pozorne 236

str.

§ 68. Pole wyrażone przez ładunki pozorne. Prawo Coulomba. Rola prawa odwrotnych kwadratów. Przykład hydrokinematyczny . 238
§ 69. Energia wyrażona przez ładunki prawdziwe i potencyały 242
§ 70. Ogólne uwagi o problematach „rozmieszczenia elektrycznego“ 243
§ 71. Układ przewodników; energia; spółczynniki potencyalne, spółczynniki indukcyjne, pojemności; kondensator 244
§ 72—74. Siły ponderomotoryczne powierzchniowe: wzór ogólny; powierzchnia graniczna dwóch dielektryków pozbawiona ładunku prawdziwego; powierzchnia naelektryzowana, przy zaniechaniu różnicy spółczynników dielektrycznych; powierzchnia graniczna przewodnika i dielektryka 248
§ 75. Siły ponderomotoryczne dla układu przdwodników, przy stałych ładunkach 252
§ 76. — przy stałych potencyałach 253
§ 77. Porównanie pola grawitacyjnego z elektrycznem, lub magnetycznem 254

Zagadnienia elektrostatyczne specyalne.

§ 78. Uwagi wstępne, szczególniej o problematach „rozmieszczenia elektrycznego“ 255
§ 79. Kondensator płaski 257
§ 80. Kule spółśrodkowe 260
§ 81. Walce kołowe spółosiowe 262
§ 82. Równanie Laplace'a w spółrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych 263
§ 83. Spółrzędne eliptyczne 268
§ 84. Elipsoidy spółogniskowe 270
§ 85. Hyperboloidy 276
§ 86. $\nabla^2\varphi$ w spółrzędnych cylindrycznych 276
§ 87. Spółrzędne biegunowe 278
§ 88. Funkcye kuliste 279
§ 89. Przewodnik kulisty wobec punktu elektrycznego . . . 288
§ 90. Metoda obrazów elektrycznych 292
§ 91. Przewodnik kulisty w polu jednostajnem 295
§ 92. Dziedziny „dwuwymiarowe 297
§ 93. Pola osiowo symetryczne 300
§ 94. Odkształcenie danego pola przez bryłę dielektryczną; uwagi ogólne dotyczące zagadnień tego rodzaju 301
§ 95. Elipsoid dielektryczny w polu (E_0) jednostajnem . . . 303
§ 95a. Kula dielektryczna w polu jednostajnem 309

Pole magnetostatyczne.

§ 96. Własności zasadnicze 312
§ 97. Potencyał magnetyczny nazewnątrz magnesów. Rola magnetyzmów (pozornych). Energia. Wysił magnetyczny 313
§ 98. Magnetyzm prawdziwy nie istnieje, wobec czego pole magnetostatyczne bez sił przyłożonych obejść się nie może; magnetyzacya wewnętrzna 315
§ 99. Energia pod postacią całki obejmującej wnętrze magnesów 318

str.

§ 100. „Przewodniki magnetyczne“ nie istnieją 318
§ 101. Siły ponderomotoryczne. Prąd fikcyjny 319
§ 102. Uwagi ogólne o t. zw. zagadnieniach „indukcyi magnetycznej“; analogia do § 94 321
§ 103. Określenie pola przy danej sile przyłożonej. Magnetyzm trwały i wzbudzony. Spółczynnik magnetyzacyi 322
§ 104. Magnesy solenoidalne 326
§ 105. Magnesy lamelarne 327
§ 106. Magnes solenoidalny i jednocześnie lamelarny . . . 330

ROZDZIAŁ V.

Prądy niemal stateczne.

§ 107. Odróżnienie pól statecznych od statycznych. Układ obwodów prądu elektrycznego czyli wirów magnetycznych 335
§ 108. Potencyał skalarny nazewnątrz wirów 337
§ 109. Potencyał wektorowy jako funkcya pomocnicza. Pole magnetyczne odpowiadające n obwodom; prawo Biot-Savarta . . . 338
§ 110. Energia magnetyczna (elektrokinetyczna) układu prądów. Spółczynniki samoindukcyi i indukcyi wzajemnej. Analogia między układem obwodów prądu a układem przewodników naelekryzowanych, ogólniej: między układem wirów dowolnego pola solenoidalnego a układem powierzchni izopotencyalnych dowolnego pola irotacyjnego 339
§ 111. Siły ponderomotoryczne 341
§ 112. Siły elektromotoryczne wzbudzone 347
§ 113. Układ prądów jako dynamiczny układ policykliczny . 350
§ 114. Równania różniczkowe dla n obwodów sztywnych, nieruchomych 353
§ 115. Uwzględnienie pojemności obwodu. Drgania własne (swobodne) i drgania wymuszone 357

Spis alfabetyczny do tomu pierwszego 369

WAŻNIEJSZE OMYŁKI.

str.	*wiersz*	*zamiast*	*powinno być*
22	16 z góry	*wertorowem* . . .	*wektorowem*
34	równ. (72)	ds	**ds**
34	5 z dołu	„	„
36	1 z góry	„	„
36	1, 13 „	„	„
39	4 „	Nożemy	Możemy
68	1 „	*acykliczną*	*acykliczną*
75	19 z dołu	curl R	*curl* **R**
80	12 z góry	te	to
97	9 „	18	26
108	5 „	należy przekreślić wyraz: obraną	
123	12 z dołu	rozważanie . . .	rozważenie
125	2 z góry	*konwencyjnego* . .	*konwekcyjnego*
128	równ. (36)	$\frac{\partial}{\partial t}\ div\ \mathbf{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$	
152	w czwart. równ. (73)	$= -2$ ...	
166	6 z dołu	*Psincip*	*Princip*
167	7 z góry	przed drugą całką należy dopisać czynnik M	
„	6 z dołu	obliczymy . . .	obliczamy
168	15 z góry	błoną	błonę
185	2 z góry	indykcyj	indukcyj
„	17 z dołu	naturalnego . . .	neutralnego
186	12 „	elektrycznej . . .	elektromagnetycznej
190	7 „	indykcyę	indukcyę
192	6 „	iloczynem . . .	iloczynem $\rho\mathbf{E}$
211	17 „	elektromagnetyczny	elektryczny lub magnetyczny
217	5—6 z góry	eneritii	energii
„	7 „	gstnieją	istnieją
„	8 z dołu	$\mathbf{D}_1$, $\mathbf{B}_1$	D_1, B_1
230	w równ. (VI')	należy przekreślić obadwa czynniki $^1/_c$	
240	10 z dołu	φ	ψ
261	4 „	rotencyał. . . .	potencyał
276	w równ. (282)	$8\pi KR$	$8KR$
281	w równ. (290)	$(n+1)Y_n$ . . .	$n(n+1)Y_n$
283	17 z góry	pa	na
285	9 z dołu	(296)	(297)
306	4 z góry	(313).	(333)
310	w równ. (349)	$K+2K$	$K'+2K$
330	10 z góry	opływającem . .	opływającemu
338	16 „	w kierunku . . .	w kierunku dodatnim
339	2 „	*ds*, **r**	**ds**, **r**
344	14 z dołu	zwajemna . . .	wzajemna
passim	zamiast ten elipsoid, hyperboloid		ta elipsoida, hyperboloida.

Wstęp.

Algebra i analiza wektorów.

WSTĘP.

Algebra i analiza wektorów.

Odcinek prostej o pewnej długości i o pewnym kierunku w przestrzeni nazywa się *wektorem*, a raczej jest pierwowzorem wszelkich wektorów. Nadajemy bowiem miano wektora każdej wielkości, dla której wyznaczenia, czyli odróżnienia od innych podobnych, niezbędne jest i wystarczające podanie pewnej liczby (rzeczywistej) i pewnego kierunku w przestrzeni. Otóż *liczbę* taką możemy uważać zawsze jako długość odcinka, wyrażoną w pewnych dowolnie obranych jednostkach, np. w centymetrach, *kierunek* zaś — jako kierunek tegoż odcinka prostej w przestrzeni.

Jeżeli natomiast dla zupełnego określenia jakiejś wielkości wystarcza podanie samej tylko liczby, wyrażającej, ile razy wielkość ta mieści w sobie pewną (dowolnie obraną) jednostkę, natenczas wielkość taka nazywa się *skalarem*.

Tak np. przesunięcie cząstki materjalnej, prędkość jej ruchu, przyspieszenie, moment jej czyli tak zwana „ilość ruchu“, siła działająca na cząstkę materjalną, obrót bryły sztywnej o piewien kąt naokoło pewnej osi, chwilowa prędkość obrotowa, moment obrotu pary sił — są wektorami. Natomiast masa, temperatura, siła żywa, energja wogóle, praca mechaniczna (lub inne), ciśnienie hydrostatyczne (t. j. jednakowe we wszystkich kierunkach), potencjał — są skalarami.

Każdy wektor można określić zupełnie przez *trzy* wielkości skalarne, np. przez rzuty jego na trzy raz na zawsze obrane osie prosto — lub skośnokątne (byle tylko nie leżące w jednej płaszczyźnie), czyli przez tak zwane „składowe“ wzdłuż tych osi. Taki jednak, obecnie jeszcze prawie powszechnie używany, rozkład wektora wnosi ze sobą oczywiście elementy sztuczne, o ile mianowicie ów układ „osi spółrzędnych“, czyli owo rusztowanie wznoszone przy danych zjawiskach lub tworach trwających albo zmiennych w przestrzeni bywa wogóle dowolne i niema nic wspólnego z cechami

istotnemi tych tworów lub zjawisk. Najczęściej wynika stąd najzupełniej sztuczne, czyli obce danemu zjawisku, zagmatwanie, które zaciemnia lub przykrywa treść właściwą, t. j. utrudnia odczytanie jej z otrzymanych tą drogą wzorów skalarnych.

Z tej to uwagi, a lepiej jeszcze z licznych przykładów w samym tekście niniejszego dzieła, zrozumiemy, o ile wygodniejszem i prostszem może być operowanie wektorami jako pewnemi całościami, bez roskładu ich na składowe skalarne, szczególniej w takiej dziedzinie, w której mamy do czynienia *przeważnie z wektorami;* a taką właśnie jest dziedzina zjawisk elektromagnetycznych.

Ponieważ tedy pragnąłbym możliwie wszystkie nasze rozważania wyrazić w języku wektorów, który u nas jak na całym zresztą kontynencie dotychczas jeszcze mało jest rospowszechniony, przeto uważam za stosowne wyłożyć we Wstępie zasadnicze określenia i twierdzenia z algebry i analizy wektorów wzorując się w punktach zasadniczych na szemacie wypracowanym przez *Heaviside'a* i używanym, z wielkiem powodzeniem, przez tegoż i innych fizyków szczególniej w dziedzinie zajmujących nas zjawisk *) Szemat ten można uważać jako znakomite uproszczenie (ze szczególnem uwzględnieniem potrzeb fizyka matematycznego) pierwotnego rachunku-kwaternionów *Hamiltona.*

Wstrzymuję się tu od wszelkich uwag natury teoretyczno-poznawczej, jako wychodzących poza ramy niniejszego dzieła, i przechodzę wprost do wyłożenia podstawowych określeń i prawideł rachunkowych owego uproszczonego systemu, oraz szczególniej tych twierdzeń, które w naszych rozważaniach elektromagnetycznych najbardziej mogą nam być pomocne.

Określenie I. Dwa wektory uważamy jako *równe* sobie, jeżeli wyobrażające je odcinki proste mają *równe długości* i są do siebie *zgodnie równoległe* (t. j. tworzą kąt zero, a nie 180^0), *zupełnie niezależnie od położenia* tych odcinków w przestrzeni.

Długość *(skalarną)* odcinka wyobrażającego dany wektor możemy nazwać *natężeniem* lub *tensorem* tego wektora. Wektor o dowolnym kierunku, lecz o natężeniu równem jedności, nazywa się *wektorem jednostkowym.*

Wektory będę oznaczał czcionkami *tłustemi* (grotesk), *natężenia* zaś wektorów odpowiedniemi czcionkami zwyczajnemi; tak więc A, B, C będą natężeniami wektorów **A, B, C.** Dla wektorów jednostkowych nie wprowadzę żadnej stałej symboliki, lecz w każdym poszczególnym wypadku podam dotyczęce objaśnienie.

---

*) Patrz „Electromagnetic Theory", Tom I. Rozdział III, tudzież wszystkie inne rozdziały tej książki, którą gorąco polecam czytelnikowi.

Określenie II. Jeżeli koniec wektora **A** jest początkiem wektora **B**, nazywamy *sumą* **A** i **B** i oznaczamy przez **A**+**B** trzeci wektor **R**, który biegnie od początku pierwszego do końca drugiego. (Fig. 1).

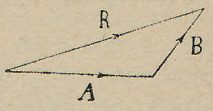


Fig. 1.

Określenie to, na pozór za ciasne, obejmuje jednak pojęcie sumy dla *wszelkich* wektorów. Jeżeli bowiem wektor **B** jest dany zupełnie dowolnie (względem **A**), możemy, według Określ. I, przesunąć go w przestrzeni tak, aby pozostał do siebie równoległym i aby początek jego znalazł się w końcu wektora **A**.

Stąd też widzimy np., że suma wektorów **A**, **B** mających wspólny początek 0 jest dana, pod względem natężenia i kierunku, przez przekątnię równogległoboka zbudowaneo na **A**, **B** (Fig. 2), biegnąca z punktu 0 do przeciwległego punku P; istotnie bowiem, według Określ. I, wektor **B′** jest równy wektorowi **B**, skoro tylko **B′**↑↑**B** (zgodnie równoległe) i B′=B. *) Moglibyśmy zresztą postawić to na czele jako określenie sumy dwóch wektorów, zamiast Określenia II.

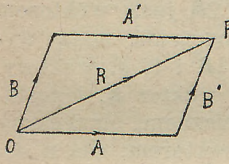


Fig. 2.

Ponieważ w tymże równoległoboku **A′**=**A** (skoro **A′**↑↑**A**, A′=A), przeto **B**+**A**=**B**+**A′**=**R**=**A**+**B′**=**A**+**B**, t. j.:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A},$$

dla dowolnych dwóch wektorów.

Rozważając zaś wektor **R** i dowolny inny wektor **C**, i t. d., otrzymamy łatwo uogólnienie powyższej równoważności dla 3-ch, 4-ch i t. d. wektorów, tudzież np. **A**+(**B**+**C**)=(**A**+**B**)+**C**, i t. d. Możemy tedy wygłosić następujące twierdzenia:

Twierdzenie I. Dodajnikom sumy wektorów przysługują prawa: *przemiennościowe i łącznościowe* (asocjacyjne), czyli: porządek ani ugrupowanie dodajników nie wpływa na wartość sumy wektorów.

Jeżeli koniec wektora **A** jest początkiem wektora **B**, koniec **B** początkiem **C**, i t. d. (co zawsze osiągnąć można przez przesunięcia równoległe), natenczas wektor **R**=**A**+**B**+**C**+... łączy początek pierwszego z końcem ostatniego wektora. Tak np. suma 3-ch wektorów **A**, **B**, **C** będzie dana przez przekątnię równoległościanu zbudowanego na bokach **A**, **B**, **C** (Fig. 3.).

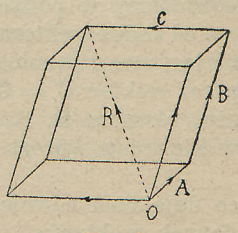


Fig. 3.

Jeżeli przy takiem ułożeniu wektorów, które możnaby nazwać *łaáncuchowem*, koniec ostatniego wektora zlewa się z początkiem pierwszego, wówczas

*) Mamy, oczywiście, zawsze na myśli przestrzeń *euklidesową*.

suma wszystkich tych wektorów równa się zeru (Fig. 4). Jeżeli wektory te (dodajniki) wyrażają np. przesunięcia cząstki materjalnej, natenczas po kolejnem przebyciu wszystkich tych przesunięć cząstka znajdzie się w swem położeniu pierwotnem, t. j. nie dozna żadnego przesunięcia wypadkowego; jeżeli zaś wektory te, stanowiące łańcuch zamknięty, wyobrażają siły przyczepione do danego punktu, siły te — jak się mówi — „równoważą się“ wzajemnie, t. j. na punkt ten nie działa żadna siła wypadkowa.

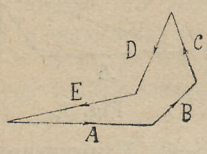


Fig. 4.

Suma dowolnej liczby wektorów o jednym i tym samym kierunku będzie wektorem o tymże kierunku. Rozważając zaś dodajniki równe, zobaczymy łatwo, że $\mathbf{A}+\mathbf{A}$ czyli $2\mathbf{A}$ jest wektorem o kierunku $\mathbf{A}$ i o natężeniu $2\mathbf{A}$, i że podobne znaczenia mają wyrazy $3\mathbf{A}$, $4\mathbf{A}$ i t. d.; rozumiejąc zaś przez $\frac{1}{2}\mathbf{A}$, $\frac{1}{3}\mathbf{A}$ i t. d. wektory, które — powtórzone 2, 3 i t. d. razy — dają wektor $\mathbf{A}$, i posługując się znanem powszechnie rozumowaniem granicznem, otrzymamy znaczenie ilorazu $n\mathbf{A}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest dowolnym wektorem, zaś n dowolną liczbą skalarną, rzeczywistą i *dodatnią* : całkowitą, ułamkową lub niewymierną; $n\mathbf{A}$ będzie mianowicie wektorem zgodnie równoległym do $\mathbf{A}$ i mającym natężenie nA, czyli wektorem $\mathbf{A}$ wydłużonym w stosunku n:1. (O wypadku, w którym n jest skalarem *ujemnym*, niebawem będzie mowa).

Oznaczając np. przez $\mathbf{a}$ wektor *jednostkowy* mający kierunek danego wektora $\mathbf{A}$, napiszemy w myśl powyższej uwagi

$$\mathbf{A} = A\mathbf{a}.$$

Określenie III. Przez *różnicę* $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ dwóch wektorów $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ rozumiemy wektor $\mathbf{C}$, który dodany do $\mathbf{B}$ daje $\mathbf{A}$.

Innemi słowy: powiadamy, że

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B},$$

jeżeli

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{A}.$$

Stąd widzimy łatwo, że skoro początki wektorów $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ zlewają się, powiedzmy w punkcie 0 (Fig. 5), wektor $\mathbf{C}$ biegnie od końca wektora $\mathbf{B}$ do końca wektora $\mathbf{A}$. Dopełniając zaś równoległobok (na tymże rysunku) przez wektor $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$ i przez wektor $\mathbf{B}'$ o natężeniu równem $\mathbf{B}$, równoległy do B lecz biegnący w kierunku wprost przeciwnym, otrzymamy

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}',$$

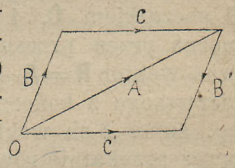


Fig. 5.

co daje nam również prostą regułę dla zbudowania różnicy dwóch danych wektorów. Stąd też widzimy, że — ażeby pozostać w zgodzie z powyższem określeniem, należy napisać $\mathbf{B}' = -\mathbf{B}$. Wynika to zresztą z powyższego określenia, dla $\mathbf{A} = 0$; istotnie, mamy wówczas $\mathbf{C} = 0 - \mathbf{B} = -\mathbf{B}$ i $\mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$, czyli $\mathbf{B} + (-\mathbf{B}) = 0$, t. j.: $-\mathbf{B}$ jest wektorem biegnącym *od końca* wektora $\mathbf{B}$ do jego początku,

czyli tym samym wektorem, który przed chwilą oznaczyliśmy przez **B'**.

Innemi słowy: przez zmianę znaku (+ na — lub odwrotnie) danego wektora należy rozumieć jego obrót o 180^0, czyli odwrócenie kierunku, przy zachowaniu natężenia. *) Tak więc odejmowanie wektorów redukuje się ostatecznie do dodawania wektorów. Jeżeli skalar n jest ujemnym, natenczas n **A** wyraża wektor **A** odwrócony i wydłużony w stosunku [n] : 1.

Z powyższych określeń widzimy, że suma (lub różnica) dwóch wektorów **A, B** (jeżeli nie znika) jest zawsze *również wektorem*, i że wektor ten *leży w płaszczyznie* **A, B,** **) lub jest do płaszczyzny tej równoległy (co według Określ. I. na jedno wychodzi).

Poznamy teraz inne kombinacje dwóch wektorów **A, B,** których rezultat jest *skalarem*, względnie wektorem *nie* równoległym do płaszczyzny **A, B.** Dwie te kombinacje zasadnicze, nader płodne w zastosowania, nazywają się *iloczynami: skalarnym*, względnie *wektorowym*, dwóch wektorów **A, B.**

Zacznijmy od pierwszego.

Określenie IV. Rzut (skalarny) wektora **A** na wektor **B** pomnożony przez natężenie wektora **B** nazywamy *iloczynem skalarnym* tych dwóch wektorów i oznaczamy przez **AB.**

Możemy to napisać

$$\mathbf{AB} = A \cos (\mathbf{A},\mathbf{B}).\ B.$$

Ponieważ po prawej stronie mamy iloczyn trzech skalarów (t. j. iloczyn w zwykłem, algebraicznem znaczeniu słowa), przeto

$$\mathbf{BA} = B \cos (\mathbf{B},\mathbf{A}).\ A = A \cos (\mathbf{A},\mathbf{B}).\ B,$$

t. j.

$$\mathbf{BA} = \mathbf{AB},$$

czyli: porządek czynników w ilocznie skalarnym dwóch wektorów jest — w myśl samego Określenia — sprawą zupełnie obojętną.

Iloczyn **AB** jest tedy *skalarem*, niezależnym zresztą od samych kierunków **A** i **B**, lecz tylko od ich natężeń i od zawartego między nimi kąta;

$$\mathbf{AB} = A.B.\ \cos (\mathbf{A},\mathbf{B}).$$

Możemy np. sprowadzić wektory **A, B** do wspólnego początku i przenosić lub obracać je w przestrzeni jako jednę sztywną całość w sposób najdowolniejszy, a nie wywołamy przez to żadnej zmiany w ich iloczynie skalarnym.

Z zastosowaniem tego pojęcia spotkamy się częstokroć w samym tekście. W tem miejscu zaś ograniczę się do jednego tylko

---

*) Zaznaczmy tu jeszcze wyraźnie, że natężenie każdego wektora należy, według powyższych wywodów, uważać zawsze jako *dodatnie*.

) Jeżeli **A, B są dane pierwotnie przez odcinki *nie* leżące w jednej płaszczyźnie, możemy je przez przesunięcie równoległe **A** lub **B** (dozwolone według Określ. I.) sprowadzić zawsze do jednej płaszczyzny.

przykładu. Jeżeli **A** jest siłą działającą na punkt materjalny, **B** zaś przesunięciem (elementarnem) tego punktu, praca odpowiednia wyraża się przez AB cos (**A**,**B**), a więc przez dopiero co określony iloczyn skalarny **AB**.

Następująca uwaga nie będzie bez korzyści dla czytelnika. Ponieważ $n = \mathbf{AB}$ jest skalarem, przeto mnożąc przezeń trzeci wektor **C**, otrzymamy w wyniku wektor n**C**, t. j. wektor **C** wydłużony [n] razy *) i mający pierwotny swój lub wprost przeciwny kierunek, zależnie od tego czy $n > 0$ czy też $n < 0$, t. j. czy kąt **A**,**B** jest ostry czy rozwarty. Z jednej więc strony, nie daje nam to nic nowego, z drugiej zaś strony wynika stąd przestroga, abyśmy nie uważali jako równe iloczyny:

$$\mathbf{(AB)\ C},\ \mathbf{A\ (BC)} \text{ czyli } \mathbf{(BC)\ A},\ \mathbf{(CA)\ B}.$$

W tym też celu użyłem tu nawiasów; możnaby też napisać **AB. C**, **BC. A**, i t. d. Takim więc iloczynom wektorów nie przysługują prawa łącznościowe i przemiennościowe w całej pełni, jak sumie wektorów. Poza tem należy zauważyć, że, podczas gdy sumy $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C})+\mathbf{D}$. i t. d. są zawsze wektorami, iloczyny owe, przy wprowadzaniu coraz dalszych czynników wektorowych są naprzemian skalarami i wektorami, a mianowicie:

$\mathbf{AB}$ jest skalarem

$\mathbf{(AB)\ C}$ „ wektorem

$[\mathbf{(AB)\ C}]\ \mathbf{D} = \mathbf{(AB)\ (CD)}$ skalarem

i tak dalej.

Jeżeli kąt **A**, **B** jest ostry, cos $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) > 0$, a więc iloczyn **AB** jest dodatni; jeżeli kąt ten jest rozwarty, iloczyn **AB** jest ujemny.

Jeżeli wektory **A**, **B** są do siebie *prostopadłe*, mamy cos $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$, a więc

$$\mathbf{AB} = 0,$$

niezależnie od natężenia tych wektorów. Odwrotnie więc, z równania $\mathbf{AB} = 0$ możemy tylko wywnioskować, że $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ (chyba że jeden z tych wektorów lub obadwa znikają, lecz wówczas rozważanie ich wzajemnego nachylenia jest pozbawione treści); to zaś oczywiście, przy *danym* np. kierunku **B**, określa tylko *płaszczyznę*, do której wektor **A** jest równoległy. Gdybyśmy natomiast mieli dwa równania

$$\mathbf{AB} = 0,\ \mathbf{AC} = 0,$$

w których **B**,**C** są danemi wektorami dowolnemi, byle tylko tworzącemi ze sobą kąt różny od zera i od dwóch prostych, *kierunek* wektora **A** byłby zupełnie określony, a mianowicie prostopadły do płaszczyzny **B**, **C**; lecz co do natężenia wektora, równania te nie mogłyby nas, oczywiście, poinformować. Jeżeli mamy trzy równania

$$\mathbf{AB} = 0,\ \mathbf{AC} = 0,\ \mathbf{AD} = 0$$

i jeżeli dane wektory **B**, **C**, **D** nie leżą w jednej płaszczyznie (i nie dają się do jednej płaszczyzny sprowadzić), natenczas dopiero wy-

*) Przez [n] rozumiem wartość bezwzględną wielkości skalarnej n.

nika z nich jeonoznacznie $\mathbf{A}=0$, a więc też np. z trzech dopiero równań

$$(\mathbf{X}-\mathbf{A})\,\mathbf{B}=0,\ (\mathbf{X}-\mathbf{A})\,\mathbf{C}=0,\ (\mathbf{X}-\mathbf{A})\,\mathbf{D}=0,$$

o nieznikających i nieleżących w jednej płaszczyznie wektorach **B, C, D**, wynika jednoznacznie $\mathbf{X}=\mathbf{A}$. Innemi słowy: dla jednoznacznego określenia wektora są niezbędne i wystarczające *trzy* niezależne od siebie równania skalarne lub inne jakiekolwiek dane skalarne.

Jeżeli **A, B** są do siebie *zgodnie równoległe*, mamy $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})=1$, t. j.:

$$\mathbf{AB}=\mathrm{A}.\ \mathrm{B}.$$

Jeżeli $\mathbf{B}=\mathbf{A}$, mamy to, co możnaby nazwać *kwadratem skalarnym* wektora **A**, i możemy napisać

$$\mathbf{AA}=\mathbf{A}^2=\mathrm{A}^2.$$

Jeżeli więc **a** jest dowolnym wektorem *jednostkowym*, mamy

$$\mathbf{a}^2=1;$$

odwrotnie też, równanie takie będzie zawsze wyrażało, że wektor **a** jest jednostkowym (nie pouczając nas oczywiśbie zgoła co do jego kierunku).

Jeżeli **a, b** są dwa wektory *jednostkowe*, mamy

$$\mathbf{ab}=\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Rozważmy teraz iloczyn skalarny wektora **A** i sumy dwóch innych wektorów $\mathbf{B}+\mathbf{C}$. Według Określenia IV mamy

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathrm{A}.\ \text{rzut}\ (\mathbf{B}+\mathbf{C})\ \text{na}\ \mathbf{A};$$

lecz rzut sumy wektorów na dowolny wektor równa się sumie (algebraicznej) rzutów dodajników na tenże wektor a raczej kierunek, a więc

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathrm{A}.\ \mathrm{B}\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})+\mathrm{A}.\ \mathrm{C}\cos(\mathbf{A}, \mathbf{C}),$$

t. j.

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}.$$

To samo zachodzi oczywiście, jeżeli zamiast **B, C** mamy dowolną liczbę dodajników — wektorów.

Twierdzenie II. Mnożeniu skalarnemu sumy wektorów przez wektor przysługuje prawo *rozdzielnościowe*. Iloczyn skalarny dwóch sum wektorów wyraża się przez iloczyny skalarne poszczególnych dodajników zupełnie tak samo jak w zwykłej algebrze, t. j.;

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,(\mathbf{C}+\mathbf{D})=\mathbf{AC}+\mathbf{AD}+\mathbf{BC}+\mathbf{BD}.$$

Druga część tego twierdzenia wynika stąd, że, kładąc $\mathbf{C}+\mathbf{D}=\mathbf{R}$, mamy

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,(\mathbf{C}+\mathbf{D})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{R}=\mathbf{R}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}),$$

t. j. $=\mathbf{RA}+\mathbf{RB}=\mathbf{AR}+\mathbf{BR}=\mathbf{AC}+\mathbf{AD}+\mathbf{BC}+\mathbf{BD}$, c. b. d. d.

Oczywiście mamy też

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}-\mathbf{C})=\mathbf{AB}-\mathbf{AC},$$

albowiem $\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{B}+(-\mathbf{C})$; tudzież np.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2=\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2,$$

co łatwo ubrać w kształt twierdzenia geometrycznego, i wygłosić takowe, uwzględniając, że $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ są przekątniami równoległoboka **A, B**, pod względem wielkości i kierunku.

Określenie V. Nazywamy *iloczynem wektorowym* dwóch wektorów **A, B,** i oznaczamy przez V**AB** *wektor* **C** *prostopadły do* **A, B** i zwrócony w tę stronę, w którą patrząc otrzymalibyśmy przejście *od* **A** *do* **B** przez obrót mniejszy od 180° w kierunku ruchu *strzałek zegarowych*, i którego *natężenie* **C** równa się *powierzchni równoległoboka zbudowanego na* **A, B**:

$$\mathbf{C} = V\mathbf{AB},\quad C = A.\ B.\ [\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})],$$

$$\mathbf{CA} = 0,\quad \mathbf{CB} = 0.$$

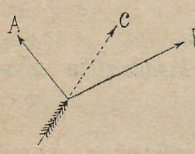


Fig. 6.

Ostatnie dwa równania wyrażają prostopadłość wektora **C** do **A** i do **B**.

Z przepisu odnoszącego się do porządku przejścia *od* **A** *do* **B**, gdy **A** pod znakiem V zajmuje pierwsze, **B** zaś drugie miejsce, z przepisu tego widzimy wprost, że zmieniając porządek tych wektorów, *odwracamy tylko kierunek* wektora **C**, t. j. z **C** otrzymujemy — **C**, czyli;

$$V\mathbf{BA} = -V\mathbf{AB}.$$

Dalej, ponieważ $C = A.\ B.\ [\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})]$, mamy dla wektorów **A, B** *równoległych* do siebie:

$$V\mathbf{AB} = 0,$$

a więc też np. dla dowolnego wektora **A**:

$$V\mathbf{AA} = 0.$$

Jeżeli $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$, mamy $C = A.\ B.$ Jeżeli jeden chociażby z wektorów **A, B** znika, mamy oczywiście $V\mathbf{AB} = 0$; odwrotnie jednak — z równania takiego możemy wogóle wywnioskować tylko, że wektory **A, B** są do siebie (zgodnie lub niezgodnie) równoległe.

Jeżeli zamiast **A, B** podstawimy m**A**, n**B**, gdzie m, n są dowolnemi *skalarami*, otrzymamy według Określ. V:

$$Vm\mathbf{A}n\mathbf{B} = mnV\mathbf{AB}.$$

Wyrażając więc np. wektory **A, B** przez odpowiednie wektory jednostkowe **a, b**, t. j. kładąc

$$\mathbf{A} = A.\,\mathbf{a},\quad \mathbf{B} = B.\,\mathbf{b},$$

otrzymamy:

$$V\mathbf{AB} = A.\ B.\ V\mathbf{ab},$$

gdzie zresztą $\mathbf{a}^2 = 1$, $\mathbf{b}^2 = 1$; mamy też

$$V\mathbf{ab} = \pm \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}).\ \mathbf{c},$$

gdzie **c** jest wektorem jednostkowym normalnym do **a, b**. Jeżeli **a, b** są również normalne czyli prostopadłe do siebie, mamy $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$, a więc

$$V\mathbf{ab} = \pm \mathbf{c},$$

gdzie wybór znaku zależy od dwóch przeciwnych sobie kierunków (normalnych do **a, b**), które mieć może wektor **c**.

Częstokroć, dla otrzymania lub chociażby tylko sprawdzenia nowych wzorów wektorowych, wygodnie jest uciec się do takich trzech wektorów jednostkowych normalnych.

Wybierzemy w tym celu i oznaczać będziemy stale przez

i, j, k

układ *prawoskrętny* trzech wektorów jednostkowych normalnych, t. j. taki, że

$$(1)\quad V\mathbf{ij} = \mathbf{k},\ V\mathbf{jk} = \mathbf{i},\ V\mathbf{ki} = \mathbf{j};$$

jeżeli np. **i** wskazuje do góry, **j** zaś na prawo, natenczas **k** biegnie naprzód (porównaj Określ. V), i to samo zachodzi dla **j, k. i** lub **k, i, j,** które otrzymuje się z **i, j, k** przez przestawienie cykliczne. Przebiegając natomiast cykl ten w kierunku odwrotnym, mamy:

$$(1')\quad V\mathbf{ji} = -\mathbf{k},\ V\mathbf{kj} = -\mathbf{i},\ V\mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

Ponieważ **i, j, k** są wzajemnie prostopadłe, mamy — według określenia iloczynu skalarnego:

$$(2)\quad \mathbf{ij} = 0,\ \mathbf{jk} = 0,\ \mathbf{ki} = 0;$$

ponieważ wreszcie każdy z tych wektorów ma być jednostkowym, mamy:

$$(3)\quad \mathbf{i}^2 = 1,\ \mathbf{j}^2 = 1,\ \mathbf{k}^2 = 1.$$

Oznaczając składowe dowolnego wektora **A** wzdłuż **i, j, k** przez A_1, A_2, A_3, możemy napisać

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_1 + \mathbf{j}A_2 + \mathbf{k}A_3.$$

Dla iloczynu *skalarnego* wektora **A** i wektora $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_1 + \mathbf{j}B_2 + \mathbf{k}B_3$ mamy, według Twierdzenia II. i wzorów (2), (3):

$$(4)\quad \mathbf{AB} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3,$$

a w szczególności dla dwóch wektorów *jednostkowych* **a, b:**

$$(5)\quad \mathbf{ab} = \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

gdzie a_1 i t. d., b_1 i t. d. są tak zwanemi dostawami kierunkowemi kierunków **a, b,** względem układu **i, j, k.**

Składowe względem **i, j, k** będę zwykle oznaczał (bez wyraźnego objaśnienia) przez tę samą literę co wektor wypadkowy, zaopatrzając ją we wskaźniki 1, 2, 3, — jak wyżej.

Rozwinięcie iloczynu *wektorowego*, podobne do (4) (mutatis mutandis), otrzymamy niebawem.

Zresztą zaznaczam, że będę możliwie unikał sztucznego rozkładu wektorów w samych rozważaniach i dowodzeniach, aczkolwiek częstokroć będę tłumaczył otrzymane już wzory wektorowe na język skalarny, aby ułatwić czytelnikowi lekturę wielu prac w tym języku napisanych.

Wracając do urwanego wątka zauważmy, że ponieważ iloczyn **VBC** dwóch wektorów **B, C** jest również wektorem, możemy go pomnożyć przez trzeci wektor **A** bądź wektorowo, bądź też skalarnie, t. j. utworzyć

$$V\mathbf{A}V\mathbf{BC} \text{ lub } \mathbf{A}V\mathbf{BC}.$$

O iloczynie **VAVBC** wkrótce będzie mowa. Obecnie natomiast zauważmy, że **AVBC**, przy takiem rozmieszczeniu wektorów jak np. na Fig. 7, wyraża *objętość* równoległościanu zbudowanego na **A, B, C.** Istotnie, natężenie wektora **VBC** równa się powierzchni podstawy (**B, C**) tej bryły, rzut zaś wektora **A** na kierunek wektora **VBC** jest wysokością tej bryły, tak iż **AVBC** jest powierzchnią podstawy pomnożoną przez wysokość, a więc objętością równoległościanu.

Otóż, uważając **C, A** lub **A, B** jako podstawę, otrzymamy dla objętości tejże bryły: **BVCA**, względnie **CVAB**. Mamy więc

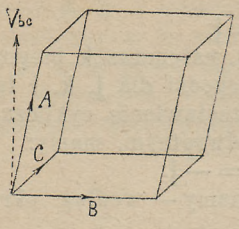


Fig. 7.

Twierdzenie III. Iloczyn skalarno-wektorowy trzech dowolnych wektorów *pozostaje niezmiennym przy cyklicznem przestawieniu czynników*, t. j.:

$$\mathbf{AVBC} = \mathbf{BVCA} = \mathbf{CVAB}.$$

Przebiegając natomiast cykl w kierunku odwrotnym zmieniamy *znak* iloczynu; tak np. $\mathbf{CVBA} = -\mathbf{AVBC}$.

Rozważając teraz iloczyn wektorowy wektora i sumy wektorów lub iloczyn wektorowy dwóch sum wektorowych, możemy wygłosić następujące nader ważne twierdzenie.

Twierdzenie IV. Iloczynowi wektorowemu przysługuje *prawo rozdzielnościowe*, t. j.:

$$\mathbf{VA}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{VAB} + \mathbf{VAC},$$

tudzież

$$(6)\quad \mathbf{V}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{VAC} + \mathbf{VAD} + \mathbf{VBC} + \mathbf{VBD},$$

podobnie jak dla iloczynów skalarnych, z tą tylko różnicą, że zmiana porządku czynników odwraca tu kierunek wektora — iloczynu.

Dowód.

Położmy na chwilę

$$(7)\quad \mathbf{VA}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) - \mathbf{VAB} - \mathbf{VAC} = \mathbf{Q}.$$

Q, jeżeli nie znika, jest pewnym wektorem. Mnożąc obie strony równania (7) skalarnie przez **A**, mamy

$$\mathbf{QA} = \mathbf{AVA}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) - \mathbf{AVAB} - \mathbf{AVAC} = 0,$$

ponieważ wektory $\mathbf{VA}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C})$, **VAB**, **VAC** są prostopadłe do **A**. Mnożąc (7) przez **B**, mamy $\mathbf{QB} = \mathbf{BVA}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) - \mathbf{BVAC}$

$$= (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{VBA} - \mathbf{BVAC} = \mathbf{CVBA} - \mathbf{BVAC} = 0,$$

według Twierdz. III. Podobnie też mamy:

$$\mathbf{QC} = \mathbf{CVA}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) - \mathbf{CVAB} = (\mathbf{B}+\mathbf{C})\,\mathbf{VCA} - \mathbf{CVAB} = \mathbf{BVCA} - \mathbf{CVAB} = 0,$$

t. j., zestawiając wyniki:

$$\mathbf{QA} = 0,\ \mathbf{QB} = 0,\ \mathbf{QC} = 0.$$

Wektor więc **Q** albo znika albo też jest prostopadły do wszystkich trzech wektorów **A, B, C**. Jeżeli **A, B, C** *nie* leżą w jednej płaszczyźnie, mamy oczywiście $\mathbf{Q} = 0$, t. j. według (7)

$$\mathbf{VA}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{VAB} + \mathbf{VAC}.$$

Dla takich więc wektorów Twierdz. IV. jest dowiedzione. Jeżeli zaś **A, B, C** leżą w jednej płaszczyźnie, możemy np. do **C** dodać wektor **D** tworzący z tą płaszczyzną kąt różny od zera, tak iż wektor $\mathbf{C}+\mathbf{D}$ nie będzie leżał w płaszczyźnie A, B; będziemy więc mieli

$$\mathbf{VA}\,[\mathbf{B}+(\mathbf{C}+\mathbf{D})] = \mathbf{VAB} + \mathbf{VA}\,(\mathbf{C}+\mathbf{D}),$$

a kładąc w tem równaniu $\mathbf{D} = 0$ (lub, jeżeli chcemy, zmniejszając D stopniowo do zera), otrzymamy $\mathbf{VA}\,(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{VAB} + \mathbf{VAC}$, q. e. d.

Druga część Twierdzenia IV., t. j. wzór (6), wynika z uwagi, że

$$V(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = -V\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = -V\mathbf{CA} - V\mathbf{CB} = V\mathbf{AC} + V\mathbf{BC}.$$

Tak więc twierdzenie to jest całkowicie dowiedzione.

Znaczenie i stosowalność praktyczna iloczynów skalarnych i wektorowych opierają się głównie na ich rozdzielnościowości, która je upodabnia do zwykłych iloczynów algebraicznych.

Korzystając z Twierdz. IV. możemy iloczyn $V\mathbf{AB}$ wyrazić łatwo przez składowe czynników. Mamy mianowicie

$$V\mathbf{AB} = V(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})$$
$$= A_1B_1\,V\mathbf{ii} + \ldots + A_1B_2\,V\mathbf{ij} + \ldots,$$

a więc, według wzorów (1) i (3) i ponieważ $V\mathbf{ii} = V\mathbf{jj} = V\mathbf{kk} = 0$:

(8) $$V\mathbf{AB} = \mathbf{i}(A_2B_3 - A_3B_2) + \mathbf{j}(A_3B_1 - A_1B_3) + \mathbf{k}(A_1B_2 - A_2B_1),$$

czyli w łatwiejszej do spamiętania postaci wyznacznika:

(8′) $$V\mathbf{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

Dla wektorów jednostkowych $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ o dostawach kierunkowych a_1 i t. d., b_1 i t. d. wynika stąd znany wzór trygonometryczny

(9) $$(V\mathbf{ab})^2 = \sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

Wzorując się na (4) i (8), czytelnik rozwinie też łatwo iloczyn $\mathbf{A}V\mathbf{BC}$ i sprawdzi tym sposobem Twierdzenie III.

Mówiliśmy już wyżej o tym iloczynie mieszanym, że tak powiem, czyli skalarno-wektorowym, trzech wektorów: $\mathbf{A}V\mathbf{BC}$; wynik jest tu oczywiście skalarem.

Rozważmy teraz iloczyn *wektorowy* wektorów $\mathbf{A}$ i $V\mathbf{BC}$, t. j. $V\mathbf{A}(V\mathbf{BC})$ czyli krócej $V\mathbf{AVBC}$.

Iloczyn ten znowu jest wektorem prostopadłym do $\mathbf{A}$ i do $V\mathbf{BC}$; lecz wektor $V\mathbf{BC}$ jest normalny do płaszczyzny $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, a więc:

$V\mathbf{AVBC}$ leży w płaszczyźnie $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i jest $\perp$ do $\mathbf{A}$.

Proces takiego mnożenia możemy oczywiście powtórzyć dowolną liczbę razy, wprowadzając coraz to nowe czynniki (wektory), a w wyniku otrzymamy zawsze wektor. Przez to też iloczyn wektorowy różni się wybitnie od skalarnego. Tak np. $V\mathbf{D}(V\mathbf{AVBC})$ będzie wektorem normalnym do $\mathbf{D}$ i do $V\mathbf{AVBC}$, i t. d.

W zastosowaniach spotkamy się atoli z mnożeniem wektorowem *dwukrotnem* tylko, t. j. z wektorem $V\mathbf{AVBC}$. Dla tego też ograniczę się tu do rozwinięcia wzoru dla *tego* jedynie iloczynu.

Wiemy już, że wektor $V\mathbf{AVBC}$ leży w płaszczyźnie $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$; powinien więc dać się wyrazić w postaci

$$V\mathbf{AVBC} = y.\mathbf{B} + z.\mathbf{C},$$

gdzie y, z są *skalarami*. Chodzi więc tylko o znalezienie wartości

y, z. Mnożąc obustronnie przez **A** (skalarnie) i uwzględniając, że $\mathbf{A}\mathrm{V}\mathbf{A}\mathrm{V}\mathbf{BC} = 0$, mamy

$$(\mathbf{AB})y + (\mathbf{AC})z = o,$$

a więc:

$$(10) \qquad \mathrm{V}\mathbf{A}\mathrm{V}\mathbf{BC} = \frac{1}{(\mathbf{AC})} y\,[(\mathbf{AC})\mathbf{B} - (\mathbf{AB})\mathbf{C}].$$

Ponieważ $y/(\mathbf{AC})$ jest skalarem, przeto wyraz w nawiasach daje nam już wprost $\pm$ kierunek szukanego wektora; aby otrzymać jego natężenie należałoby jeszcze tylko wyznaczyć y.

Rozwijając $\mathrm{V}\mathbf{BC} = \mathbf{R}$ według wzoru (8), a następnie $\mathrm{V}\mathbf{AR}$ według tegoż wzoru, mamy

$$(11) \quad \mathrm{V}\mathbf{AR} = \mathrm{V}\mathbf{A}\mathrm{V}\mathbf{BC} = \mathbf{i}\,[A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - B_1C_3)] + \mathbf{j}\,[\ldots] + \mathbf{k}\,[\ldots].$$

Aby otrzymnć stąd kształt (10), zważamy, że $\mathbf{AB} = A_1B_1 + \ldots$, $\mathbf{AC} = A_1C_1 + \ldots$; zbierzmy więc według tej wskazówki wyrazy po prawej stronie (11), a otrzymamy (przez dodanie i odjęcie, w nawiasach, wyrazu $A_1B_1C_1$):

$\mathrm{V}\mathbf{A}\mathrm{V}\mathbf{BC} = \mathbf{i}\,[(\mathbf{AC}).B_1 - (\mathbf{AB}).C_1] + \mathbf{j}\,[(\mathbf{AC})B_2 - (\mathbf{AB})C_2] + \mathbf{k}\,[(\mathbf{AC})B_3 - (\mathbf{AB})C_3]$, t. j., wracając do pierwotnych wektorów wypadkowych **B, C:**

$$(12) \qquad \mathrm{V}\mathbf{A}\mathrm{V}\mathbf{BC} = (\mathbf{AC})\,\mathbf{B} - (\mathbf{AB})\,\mathbf{C},$$

t. j. istotnie kształt (11). Własność tę czytelnik sam będzie mógł łatwo wysłowić w postaci twierdzenia. Łatwiej zresztą jest zapamiętać sam wzór (12). Zauważę tu jeszcze, że przestawiając cyklicznie **A, B, C,** nie otrzymujemy już tego samego wyniku, jak to było dla $\mathbf{A}\mathrm{V}\mathbf{BC}$, Twierdz. III. Istotnie, z (12) wynikają przez przestawienie cykliczne wektory zupełnie różne, a mianowicie:

$$(12') \qquad \mathrm{V}\mathbf{B}\mathrm{V}\mathbf{CA} = (\mathbf{BA})\mathbf{C} - (\mathbf{BC})\,\mathbf{A},$$

$$(12'') \qquad \mathrm{V}\mathbf{C}\mathrm{V}\mathbf{AB} = (\mathbf{CB})\,\mathbf{A} - (\mathbf{CA})\,\mathbf{B}.$$

Godnem uwagi jest jednak, że *suma* tych trzech wektorów *znika identycznie*; istotnie, dodając (12), (12'), (12'') i uwzględniając, że że $(\mathbf{BA}) = (\mathbf{AB})$, i t. d. (są to bowiem iloczyny skalarne), mamy identycznie:

$$(13) \qquad \mathrm{V}\mathbf{A}\mathrm{V}\mathbf{BC} + \mathrm{V}\mathbf{B}\mathrm{V}\mathbf{CA} + \mathrm{V}\mathbf{C}\mathrm{V}\mathbf{AB} = 0.$$

Ze wzoru (12) mamy np. dla $\mathbf{C} = \mathbf{A}$:

$$(14) \quad \mathrm{V}\mathbf{A}\mathrm{V}\mathbf{BA} = A^2.\,\mathbf{B} - (\mathbf{AB})\,\mathbf{A}, \text{ czyli } \mathrm{V}\mathbf{A}\mathrm{V}\mathbf{AB} = (\mathbf{AB})\mathbf{A} - A^2.\,\mathbf{B},$$

a ten właśnie wzór szczególny znajduje zastosowanie w pewnych zagadnieniach elektromagnetycznych.

Przy badaniu zjawisk elektromagnetycznych w ciałach anizotropowych czyli krystalicznych spotkamy się z pojęciem *funkcji wektorowej linjowej*, którą możemy określić w sposób następujący.

Jeżeli składowe wektora **B** względem trzech dowolnych osi *) są funkcjami linjowemi jednorodnemi składowych wektora **A** (o spół-

*) Prosto — lub skośnokątnych, byle tylko nie leżących w jednej płaszczyznie.

czynnikach skalarnych rzeczywistych), natenczas powiadam, że **B** jest funkcyą wektorową liniową wektora **A**, piszę

(15) $$\mathbf{B} = \omega\mathbf{A}$$

i nazywam ω *operatorem wektorowym liniowym.*

Operator *odwrotny*, za pomocą którego przechodzimy od **B** **A**, i który (jak natychmiast zobaczymy) również jest liniowym, możemy oznaczyć przez ω^{-1} lub $\frac{1}{\omega}$, tak iż będzie

(16) $$\mathbf{A} = \omega^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{\omega}\mathbf{B}.$$

Rozkładając np. według osi normalnych **i**, **j**, **k** i oznaczając odpowiednie spółczynniki przez ω_{11}, ω_{12} i t. d., możemy napisać:

(15a)
$$\begin{cases} B_1 = \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_{13}A_3 \\ B_2 = \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_{23}A_3 \\ B_3 = \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3. \end{cases}$$

(15) możemy uważać jako krótki symbol operacyj (15a). dodając, że $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_1 + \mathbf{j}B_2 + \mathbf{k}B_3$.

Rozwiązując (15a) ze względu na A_1, A_2, A_3, w założeniu że wyznacznik $(\omega_{11} \ldots \omega_{33})$ jest różny od zera, otrzymamy **A** jako funkcyę liniową **B**, tak iż operator ω^{-1} również będzie liniowym i zupełnie jednoznacznie określonym.

Widzimy też z (15a), że najogólniejszy operator liniowy ω wymaga podania *dziewięciu* wzajemnie niezależnych wielkości skalarnych, jak np. ω_{11}, ω_{12} i t, d. Wogóle bowiem może być ω_{12} różne od ω_{21} i t. d.

Jeżeli zaś jest $\omega_{12} = \omega_{21}$, $\omega_{23} = \omega_{32}$, $\omega_{31} = \omega_{13}$, tak iż liczba owych cech niezależnych redukuje się do *sześciu*, natenczas operator ω nazywa się symetrycznym.

Zmieniając w wypadku ogólnym, porządek wskaźników, t. j. biorąc ω_{21} zamiast ω_{12}, i t. d. otrzymujemy inny operator liniowy ω', który nazywa się *sprzężonym* względem ω. Operator symetryczny ω jest więc samosprzężonym.

Wprowadzając trzy wektory ω_1, ω_2, ω_3:

(17) $\omega_1 = \mathbf{i}\omega_{11} + \mathbf{j}\omega_{12} + \mathbf{k}\omega_{13}$, $\omega_2 = \mathbf{i}\omega_{21} + \mathbf{j}\omega_{22} + \mathbf{k}\omega_{23}$, $\omega_3 = \mathbf{i}\omega_{31} + \mathbf{j}\omega_{32} + \mathbf{k}\omega_{33}$, możemy (15a) napisać w postaci iloczynów skalarnych

$$B_1 = \omega_1\mathbf{A},\ B_2 = \omega_2\mathbf{A},\ B_3 = \omega_3\mathbf{A},$$

a więc

(18) $$\mathbf{B} = \mathbf{i}.\omega_1\mathbf{A} + \mathbf{j}.\omega_2\mathbf{A} + \mathbf{k}.\omega_3\mathbf{A} = \omega\mathbf{A},$$

czyli symbolicznie

(19) $$\omega = \mathbf{i}.\omega_1 + \mathbf{j}.\omega_2 + \mathbf{k}.\omega_3.$$

Kierunki wektora **A** i odpowiedniego wektora $\mathbf{B} = \omega\mathbf{A}$ będą wogóle różne, podobnie jak ich natężenia. W pewnych atoli kierunkach szczególnych, charakterystycznych dla danego operatora ω, a które nazywają się jego *osiami głównemi*, wektory **A** i **B** będą

równoległe do siebie, t. j. $\mathbf{B} = \omega\mathbf{A} = n\mathbf{A}$, gdzie n jest czynnikiem *skalarnym* rzeczywistym. Szukajmy tych kierunków szczególnych i odpowiednich wartości skalara n. Dla odróżnienia ich od wszelkich innych oznaczmy przez λ wektor jednostkowy wzięty w kierunku jednej z możliwych osi głównych operatora ω, tak iż będzie

(20) $$\omega\lambda = n\lambda = n\,[\mathbf{i}\lambda.\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\lambda.\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\,\lambda.\,\mathbf{k}].$$ *).

Według (18) mamy

(21) $$\omega\lambda = \omega_1\lambda.\,\mathbf{i} + \omega_2\lambda.\,\mathbf{j} + \omega_3\,\lambda.\,\mathbf{k},$$

a więc, odejmując (20) od (21):

$$(\omega_1\lambda - n\mathbf{i}\lambda)\,\mathbf{i} + (\omega_2\lambda - n\mathbf{j}\lambda)\,\mathbf{j} + (\omega_3\lambda - n\mathbf{k}\lambda)\,\mathbf{k} = 0,$$

czyli

(22) $$(\omega_1 - n\mathbf{i})\,\lambda = 0,\ (\omega_2 - n\mathbf{j})\lambda = 0,\ (\omega_3 - n\mathbf{k})\,\lambda = 0.$$

Oś główna λ musi więc być normalną do trzech wektorów:

(23) $$\alpha = \omega_1 - n\mathbf{i},\ \beta = \omega_2 - n\mathbf{j},\ \gamma = \omega_3 - n\mathbf{k};$$

aby zaś to było możliwe, trzy te wektory muszą leżeć *w jednej płaszczyźnie* (jeżeli żaden z nich nie znika), a warunek ku temu niezbędny i wystarczający daje się napisać w postaci równania:

(24) $$\alpha V\beta\gamma = 0$$

lub też zresztą $\beta V\gamma\alpha = 0$, $\gamma V\alpha\beta = 0$.

Mamy więc równanie:

(25) $$(\omega_1 - n\mathbf{i})\,V\,(\omega_2 - n\mathbf{j})\,(\omega_3 - n\mathbf{k}) = 0,$$

t. j. równanie *3-go stopnia* dla skalara n. Jeżeli wszystkie *trzy* pierwiastki tego równania, powiedzmy n_1, n_2, n_3, są rzeczywiste i różne od siebie, otrzymamy trzy płaszczyzny jak (23), a więc *trzy osie główne*, powiedzmy λ_1, λ_2, λ_3, normalne do tych płaszczyzn.

Według (8′) i (4) możemy zresztą napisać, dla *dowolnych* wektorów **A, B, C** (o składowych A_1, A_2 i t. d.):

(26) $$\mathbf{A}V\mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix},$$

co zresztą jest znanym powszechnie wyrazem objętości równoległościanu zbudowanego na **A, B, C.**

Powyższe więc równanie (25) dla skalara n możemy napisać, w postaci wyznacznika, według (17):

(25a) $$D = \begin{vmatrix} \omega_{11} - n & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} - n & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} - n \end{vmatrix} = 0.$$

Zauważmy, że dla operatora *symetrycznego* ω wyznacznik ten D staje się symetrycznym. Przez rozwinięcie tego wyznacznika otrzymalibyśmy omawiane równanie 3-go stopnia.

---

*) Ponieważ składowe dowolnego wektora **R**, wzdłuż **i**, **j**, **k** są $R_1 = i\mathbf{R}$, $_2R = \mathbf{j}\mathbf{R}$, $R_3 = \mathbf{k}\mathbf{R}$, przeto możemy napisać zawsze

$$\mathbf{R} = i\mathbf{R}.\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{R}.\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{R}.\,\mathbf{k}.$$

Wolę to jednak uczynić z kształtem pierwotnym (25) tego równania, jako bardziej bezpośrednim z punktu widzenia wektorowego.

Pamiętając o tem, że ω_1, ω_2, ω_3 są wektorami, i korzystając (kilkakrotnie) z Twierdzenia III i z wzorów (1), otrzymamy:

$$V(\omega_2 - n\mathbf{j})(\omega_3 - n\mathbf{k}) = n^2\mathbf{i} + n(V\mathbf{k}\omega_2 - V\mathbf{j}\omega_3) + V\omega_2\omega_3,$$
$$(\omega_1 - n\mathbf{i})V(\omega_2 - n\mathbf{j})(\omega_3 - n\mathbf{k}) = -n^3 + n^2(\mathbf{i}\omega_1 + \mathbf{i}V\mathbf{j}\omega_3 - \mathbf{i}V\mathbf{k}\omega_2)$$
$$+ n(\omega_1 V\mathbf{k}\omega_2 - \omega_1 V\mathbf{j}\omega_3 - \mathbf{i}V\omega_2\omega_3) + \omega_1 V\omega_2\omega_3 = -n^3 + n^2(\mathbf{i}\omega_1$$
$$+ \mathbf{j}\omega_2 + \mathbf{k}\omega_3) - n(\mathbf{i}V\omega_2\omega_3 + \mathbf{j}V\omega_3\omega_1 + \mathbf{k}V\omega_1\omega_2) + \omega_1 V\omega_2\omega_3,$$

a więc zamiast (25):

$$(25') \quad n^3 - n^2(\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33}) + n(\mathbf{i}V\omega_2\omega_3 + \mathbf{j}V\omega_3\omega_1 + \mathbf{k}V\omega_1\omega_2) - \omega_1 V\omega_2\omega_3 = 0,$$

gdzie napisaliśmy, według (17), $\mathbf{i}\omega_1 = \omega_{11}$, $\mathbf{j}\omega_2 = \omega_{22}$, $\mathbf{k}\omega_3 = \omega_{33}$.

Z postaci tej widzimy też łatwo, że przestawiając dowolnie trzy czynniki wektorowe w równaniu (25) przed jego rozwinięciem, otrzymalibyśmy identycznie to samo równanie (25').

Zakładamy, że wszystkie wielkości ω_{11}, ω_{12} i t. d. ω_{33} są *rzeczywiste*. Wówczas jeden z pierwiastków równania (25') zawsze będzie rzeczywisty, podczas gdy dwa pozostałe mogą w ogóle być wzajemnie sprzężone.

Niechaj n_1 będzie pierwiastkiem rzeczywistym tego równania, tak iż odpowiadająca mu oś główna λ_1 będzie również wektorem jednostkowym rzeczywistym. Obierzmy kierunek tej osi głównej jako kierunek $\mathbf{i}$, t. j. połóżmy

$$\lambda_1 = \mathbf{i},$$

zaś $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ niechaj jeszcze będą dowolne (lecz oczywiście normalne do $\mathbf{i}$, jak wyżej). Wówczas, kładąc w (15a) $A_2 = A_3 = 0$, A_1 różne od zera, otrzymamy $B_1 = \omega_{11}A_1$, $B_2 = \omega_{21}A_1$, $B_3 = \omega_{31}A_1$, a więc:

$$(27) \quad n_1 = \omega_{11}, \quad \omega_{21} = 0, \quad \omega_{31} = 0.$$

Równanie (25') redukuje się wówczas do

$$(28) \quad n^3 - n^2(\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33}) + n(\omega_{22}\omega_{33} + \omega_{33}\omega_{11} + \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{23}\omega_{32}) - \omega_{11}(n.\omega_{33} - \omega_{23}.\omega_{32}) = 0.$$

Otóż lewa strona tego równania powinna być podzielna przez $n - n_1$, t. j. przez $n - \omega_{11}$; istotnie też możemy ją napisać:

$$(n - \omega_{11})[n^2 - n(\omega_{22} + \omega_{33}) + \omega_{22}\omega_{33} - \omega_{23}.\omega_{32}].$$

Dla pozostałych dwóch pierwiastków n_2, n_3 mamy więc — równanie 2-go stopnia:

$$n^2 - n(\omega_{22} + \omega_{33}) + \omega_{22}\omega_{33} - \omega_{23}\omega_{32} = 0,$$

a więc:

$$(29) \quad n_2 = \tfrac{1}{2}(\omega_{22} + \omega_{33}) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\omega_{22} - \omega_{33})^2 + \omega_{23}\omega_{32}}, \quad n_3 = \tfrac{1}{2}(\omega_{22}\omega_{33}) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(\omega_{22} - \omega_{33})^2 + \omega_{23}\omega_{32}}.$$

Dla operatora ω symetrycznego mamy $\omega_{32} = \omega_{23}$, tak iż wszystkie trzy pierwiastki n_1, n_2, n_3 są rzeczywiste; wówczas zresztą jest też, według (27), $\omega_{12} = \omega_{13} = 0$.

Dla operatora niesymetrycznego wszystkie trzy pierwiastki będą zawsze rzeczywiste, skoro tylko ω_{23} i ω_{32} będą miały *te same znaki*. (Warunek ten wystarczający nie jest zresztą niezbędnym).

Uczyńmy to właśnie założenie, tak iż będą istniały trzy rzeczywiste osie główne λ_1, λ_2, λ_3 operatora liniowego ω, niekoniecznie symetrycznego.

Położyliśmy już $\mathbf{i} = \lambda_1$ (co zawsze uczynić można). Niewiedząc, czy $\lambda_2 \perp \lambda_1$, nie możemy oczywiście położyć jednocześnie $\mathbf{j} = \lambda_2$. Lecz jakikolwiek jest kierunek osi λ_2 względem λ_1, t. j. względem $\mathbf{i}$, możemy zawsze położyć $\mathbf{j}$ w *płaszczyźnie* λ_1, λ_2, czyli $\mathbf{i}$, λ_2, t. j. tak aby było

$$\lambda_2 \text{ w płaszczyźnie } \mathbf{i}, \mathbf{j};$$

wówczas będzie

$$\mathbf{k}\lambda_2 = 0. \tag{30}$$

Lecz oś λ_2, jak widzieliśmy wyżej, jest normalna do wektorów $\omega_1 - n_2\mathbf{i}$, $\omega_2 - n_2\mathbf{j}$, $\omega_3 - n_2\mathbf{k}$; możemy więc napisać np.

$$x\lambda_2 = V(\omega_3 - n_2\mathbf{k})(\omega_1 - n_2\mathbf{i}) = V\omega_3\omega_1 - n_2(V\mathbf{k}\omega_1 + V\omega_3\mathbf{i}) + n_2^2\mathbf{j}, \tag{31}$$

gdzie x jest skalarem (którego wartość moglibyśmy zresztą wyznaczyć natychmiast z warunku $\lambda_2^2 = 1$; λ_2 ma bowiem być wektorem jednostkowym). Mnożąc (31) skalarnie przez $\mathbf{k}$, mamy według (30):

$$0 = kV\omega_3\omega_1 - n_2\mathbf{k}V\omega_3\mathbf{i} = \mathbf{k}V\omega_3\omega_1 + n_2\omega_3V\mathbf{ki} = \mathbf{k}V\omega_3\omega_1 + n_2\omega_3\mathbf{j}$$
$$= \mathbf{k}V\omega_3\omega_1 + n_2\omega_{32} \text{ (według (17))};$$

wzorując się na (26) i kładąc $\omega_{31} = 0$, według (27), mamy $\mathbf{k}V\omega_3\omega_1 = -\omega_{11}.\omega_{32}$, a więc:

$$\omega_{32}(\omega_{11} - n_2) = 0;$$

ponieważ zaś, według (29), n_2 jest wogóle różne od $n_1 = \omega_{11}$, przeto mamy

$$\omega_{32} = 0.$$

Przy powyższej oryentacyi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, t. j. kładąc $\mathbf{i} = \lambda_1$ i obierając $\mathbf{j}$ w płaszczyznie λ_1 λ_2 (a więc $\mathbf{k}$ normalne do λ_1, λ_2), mamy więc ostatecznie

$$\omega_{21} = \omega_{31} = \omega_{32} = 0,\ n_1 = \omega_{11},\ n_2 = \omega_{22},\ n_3 = \omega_{33}. \tag{32}$$

Ostatnie dwa równania wynikają mianowicie z (29), przez podstawienie $\omega_{32} = 0$.

Zamiast (15a) mamy teraz:

$$B_1 = \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_{13}A_3,\ B_2 = \omega_{22}A_2 + \omega_{23}A_3,\ B_3 = \omega_{33}A_3. \tag{15b}$$

Aby otrzymać miarę kąta zawartego między osią λ_2 i wektorem $\mathbf{i}$, pomnóżmy (31) skalarnie przez $\mathbf{i}$; otrzymamy:

$$x.\lambda_2\mathbf{i} = x.\cos(\lambda_2,\mathbf{i}) = \mathbf{i}V\omega_3\omega_1 - n_2\mathbf{i}V\mathbf{k}\omega_1 = \mathbf{i}V\omega_3\omega_1 + n_2\omega_1\mathbf{j}$$
$$= -\omega_{33}.\omega_{12} + n_2\omega_{12},$$

czyli

$$x.\cos(\lambda_2,\lambda_1) = \omega_{12}(n_2 - \omega_{33}) = \omega_{12}(\omega_{22} - \omega_{33}). \tag{33}$$

Otóż wogóle ω_{22} jest różne od ω_{33} i ω_{12} różne od 0, pomimo że $\omega_{21} = 0$, a mianowicie dla operatora niesymetrycznego.

Z równania (33) widzimy więc, że dla operatora ω *niesymetrycznego* będzie wogóle $\cos(\lambda_2,\lambda_1) \gtrless 0$, a więc: osie główne takiego operatora będą wogóle *skośnokątne.*

Dla operatora *symetrycznego* mamy, przy powyższym wyborze **i**, **j**:

$$\omega_{12} = \omega_{21} = 0, \text{ a więc } \lambda_2 \perp \lambda_1;$$

dla takiego operatora będzie też, według (32):

$$\omega_{23} = \omega_{32} = 0, \quad \omega_{13} = \omega_{31} = 0,$$

a więc, według (15b):

(15c) $$B_1 = \omega_{11} A_1, \quad B_2 = \omega_{22} A_2, \quad B_3 = \omega_{33} A_3,$$

t. j. $$\lambda_1 = \mathbf{i}, \quad \lambda_2 = \mathbf{j}, \quad \lambda_3 = \mathbf{k},$$

czyli: trzy osie główne operatora liniowego *symetrycznego* są do siebie *normalne.*

W zastosowaniach elekromagnetycznych będziemy zresztą mówili tylko o operatorach liniowych symetrycznych.

Zauważmy, że (np. według (15c)) kierunki $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$ są —w myśl powyższego określenia—również osiami głównemi naszego operatora. Zwykle też rozumie się przez oś główną obadwa takie wprost sobie przeciwne kierunki, a więc $\pm\lambda_1$, i podobnie $\pm\lambda_2, \pm\lambda_3$.

Zamiast skalarów $\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}$ możemy teraz napisać krócej $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, ostrzegając czytelnika, aby nie utożsamiał tych symbolów z poprzedniemi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (które oznaczały wektory). Odtąd więc będziemy pisali

(34) $$\mathbf{B} = \omega\mathbf{A} = \mathbf{i}.\omega_1 A_1 + \mathbf{j}.\omega_2 A_2 + \mathbf{k}.\omega_3 A_3,$$

nazywając $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (zwykłe skalary) *„składowemi"* operatora symetrycznego ω *wzdłuż jego trzech osi głównych.*

Dla operatora odwrotnego (który również będzie symetrycznym) otrzymamy

(35) $$\mathbf{A} = \frac{1}{\omega}\mathbf{B} = \mathbf{i}.\frac{B_1}{\omega_1} + \mathbf{j}.\frac{B_2}{\omega_2} + \mathbf{k}.\frac{B_3}{\omega_3}.$$

Z (34) mamy jeszcze

$$B^2 = \omega_1^2 A_1^2 + \omega_2^2 A_2^2 + \omega_3^2 A_3^2,$$

skąd widzimy, że, jeżeli koniec wektora **B** porusza się po powierzchni kuli, koniec wektora **A** (mającego wspólny początek z wektorem **B**) porusza się po powierzchni *elipsoidu* trójosiowego, tudzież że osie główne operatora ω zlewają się z osiami tego elipsoidu. Widzimy też zresztą z kształtu równania (25a), dla $\omega_{21} = \omega_{12}, \omega_{32} = \omega_{23}, \omega_{13} = \omega_{31}$, że poszukiwanie osi głównych operatora wektorowego liniowego symetrycznego jest zupełnie identyczne z poszukiwaniem osi powierzchni drugiego stopnia.

Z powyższych uwag można też łatwo wyprowadzić sposób konstrukcji wektora **A**, gdy wektor **B** jest dany, i odwrotnie, w założeniu, że dany jest odpowiedni elipsoid.

Jeżeli dwie z pośród wielkości $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ są sobie równe, np. $\omega_2 = \omega_3$, natenczas ów elipsoid staje się *obrotowym;* wówczas dla *każdego kierunku* **A** *prostopadłego do osi głównej* λ_1 (której odpo-

POLITECHNIKA GDAŃSKA Biblioteka Główna

wiada $n = \omega_1$) wektory $\mathbf{B} = \omega\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}$ są do siebie *równoległe*, a mianowicie *zgodnie* równoległe, jeżeli ω_2 jest *dodatnie*. Wówczas operator ω nazywamy *jednoosiowym*, zaś $\pm\lambda_1$, krótko—jego osią. Kierunki normalne do tej osi nazywają się też zwykle równikowemi.

Jeżeli wreszcie $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, operator ω staje się zwykłym czynnikiem skalarnym; elipsoid zaś odpowiedni staje się kulą; wówczas wektory $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B} = \omega\mathbf{A}$ są do siebie równoległe dla *wszystkich* wogóle kierunków $\mathbf{A}$, a mianowicie *zgodnie* równoległe, skoro ω jest *dodatnie*.

Oto i wszystko, co z dziedziny *algebry* wektorów przydać się nam może przy rozważaniach elektromagnetycznych.

Rozwinę tu jeszcze pewne pojęcia i własności różniczkowe i całkowe wektorów, a szczególniej tak zwanych pól wektorowych, starając się ująć je w szczupłą garstkę określeń, twierdzeń lub wzorów, na które następnie częstokroć będę się powoływał.

Polem wektorowem nazywamy dowolną część przestrzeni, w której każdemu, wogóle, punktowi odpowiada pewna wielkość wektorowa, a ewentualnie dwie lub więcej takich wielkości. Tak np. mówi się o polu siły elektrycznej, lub polu elektrycznem, o polu magnatycznem lub elektromagnetecznym, jako o dziedzinach przestrzeni, w których panują siły elektryczne, lub też magnetyczne, lub też jednocześnie jedne i drugie. Podobnie też przestrzeń wypełniona poruszającym się płynem będzie polem wektorowym, a mianowicie polem wektora wyrażającego w każdym punkcie wielkość i kierunek prędkości płynu. Pole wektorowe może być *statycznem*, t. j, niezmiennem w czasie, albo też podlegać ustawicznym zmianom. Oprócz tego wektor może zmieniać się w danym polu od punktu do punktu, zarówno co do natężenia jako też co do kierunku; pole o jednakowem natężeniu i o tym samym wszędzie kierunku wektora nazywa się *jednostajnem* lub też *jednorodnem*.

Co się tyczy zmian w *czasie*, wystarczą nam następujące uwagi.

Jeżeli w chwili t mamy, dla danego punktu pola O, wektor $\mathbf{A}$, w chwili $t + \triangle t$ wektor w O będzie miał wógóle inny kierunek i inne natężenie, dane — powiedzmy — przez wektor $\mathbf{A}'$; wektor $\triangle\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \mathbf{A}$ (Fig. 8,) będzie *przyrostem* rozważanego wektora w ciągu czasu $\triangle t$; iloraz $\frac{\triangle \mathbf{A}}{\triangle t}$ (gdzie t, $\triangle t$ są oczywiście skalarami) będzie prędkością *przeciętną* zmian wektora $\mathbf{A}$ w tymże czasie. Otóż (podobnie jak dla wielkości zmiennych skalarnych), zakładając, że w miarę zmniejszania odstępu czasu $\triangle t$ do zera, wektor $\frac{\triangle \mathbf{A}}{\triangle t}$ dąży ustawicznie do

(Fig. 8).

(lub waha się w coraz to ciaśniejszych granicach naokoło) pewnej granicy określonej, zarówno pod względem natężenia jakoteż i kierunku, t. j. dąży do pewnego wektora, nazywamy ten wektor graniczny *pochodną* **A** względem t, czyli *prędkością chwilową* zmiany wektora $\dot{\mathbf{A}}$ i oznaczamy ją przez $\dot{\mathbf{A}}$ lub $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$, lub też przez $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, jeżeli chcemy uwydatnić, że **A** oprócz czasu może jeszcze zależeć od innych zmiennych. (Oczywiście wektor **A** mógłby być ciągłym w czasie, a pomimo to nie posiadać określonej pochodnej lub prędkości chwilowej, podobnie jak pewne funkcye ciągłe skalarne).

Jeżeli $\mathbf{A} = A\mathbf{a}$, mamy oczywiście

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}.\mathbf{a} + A.\dot{\mathbf{a}}, \tag{36}$$

tak iż $\dot{\mathbf{A}}$ ma, wogóle, pewną składową w kierunku **a**, t. j. w kierunku pierwotnego wektora **A**, a oprócz tego pewną składową w kierunku $\dot{\mathbf{a}}$, wogóle różnym od **a**. Zauważmy, że, jeżeli **a** jest wektorem jednostkowym, wektor $\dot{\mathbf{a}}$ niekoniecznie będzie jednostkowym. Jeżeli wektor **A** zachowuje stale swój *kierunek*, mamy $\dot{\mathbf{a}} = 0$, a więc $\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}\mathbf{a}$; jeżeli zaś *natężenie* wektora **A** jest stałe, t. j. $\dot{A} = 0$, mamy $\dot{\mathbf{A}} = A.\dot{\mathbf{a}}$.

Jeżeli zresztą n jest dowolnym skalarem zmiennym i jeżeli $\mathbf{R} = n\mathbf{A}$, gdzie **A**, **R** są wektorami, mamy oczywiście

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{n}\mathbf{A} + n\dot{\mathbf{A}}. \tag{37}$$

Dla iloczynu skalarnego **AB** dwóch wektorów **A**, **B** zmiennych w czasie mamy

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \operatorname{Lim}\left[\frac{(\mathbf{A}+\triangle\mathbf{A})(\mathbf{B}+\triangle\mathbf{B})-\mathbf{AB}}{\triangle t}\right]$$

t. j. według Twierdz. II. $= \operatorname{Lim}\left[\mathbf{A}\frac{\triangle\mathbf{B}}{\triangle t}+\mathbf{B}\frac{\triangle\mathbf{A}}{\triangle t}+\frac{\triangle\mathbf{A}.\triangle\mathbf{B}}{\triangle t}\right]$,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\mathbf{B}\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}+\dot{\mathbf{B}}\mathbf{A}, \tag{38}$$

zupełnie jak dla iloczynu dwóch funkcyj skalarnych. Zauważmy, że własność ta wypływa wyraźnie z *rozdzielnościowości* przysługującej mnożeniu skalarnemu wektorów. Zupełnie więc podobnie otrzymamy dla iloczynu wektorowego, według Twierdz. IV:

$$\frac{d}{dt}V\mathbf{AB} = V\mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt}+V\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B} = V\mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}+V\dot{\mathbf{A}}\mathbf{B} = V\mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}-V\dot{\mathbf{B}}\mathbf{A}. \tag{39}$$

Również łatwo dowiedzie czytelnik, że

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AVBC}) = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{VBC}+\mathbf{AV}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{C}+\mathbf{AVB}\dot{\mathbf{C}}, \tag{40}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{VAVBC}) = V\dot{\mathbf{A}}\mathbf{VBC}+V\mathbf{AV}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{C}+V\mathbf{AVB}\dot{\mathbf{C}}, \tag{41}$$

czyli według (12) $= (\dot{A}C + A\dot{C})B + (AC)\dot{B} - (\dot{A}B + A\dot{B})C - (AB)\dot{C}$, i tak dalej. Mamy bowiem oczywiście dla sumy wektorów **A**, **B**, **C**, ... **M**:

$$(42) \qquad \frac{d}{dt}(A+B+C+\ldots+M) = \dot{A}+\dot{B}+\dot{C}+\ldots+\dot{M}.$$

Zauważmy jeszcze, że, jeżeli zmienia się *tylko kierunek* wektora **A**, natężenie zaś jego jest stałe, możemy napisać $A^2 = \text{const.}$, a więc, według (38): $A\dot{A} = 0$, tak iż wówczas prędkość chwilowa $\dot{A}$ jest zawsze *normalną* do położenia chwilowego wektora **A**; istotnie, koniec wektora **A** porusza się w tym wypadku po powierzchni kuli.

Jeżeli wektor **A**, jakikolwiek, w zależności swej od czasu, daje się rozwinąć w zbieżny szereg według potęg dodatnich i całkowitych czasu t (liczonego od pewnej chwili), o spółczynnikach *wektorowych* C_0, C_1, C_2 i t. d., t. j.

$$A = C_0 + C_1 . t + C_2 . t^2 + C_3 . t^3 + \ldots,$$

znajdziemy łatwo, podobnie jak dla funkcyj skalarnych:

$$C_0 = A_0,\ C_1 = \dot{A}_0,\ C_2 = \frac{1}{2!}\ddot{A}_0,\ C_3 = \frac{1}{3!}\dddot{A},\ \text{i t. d.},$$

gdzie A_0, $\dot{A}_0$ i t. d. oznaczają wektor **A** i jego pochodne czyli prędkości różnych rzędów *w chwili* $t = 0$; otrzymamy więc dla **A** szereg Taylora (lub Mac-Laurina):

$$(43) \qquad A = A_0 + t\dot{A}_0 + \frac{t^2}{2!}\ddot{A}_0 + \frac{t^3}{3!}\dddot{A}_0 + \ldots.$$

Co się tyczy zbieżności nieskończonych szeregów wektorowych wogóle, ograniczymy się do następującej tylko uwagi.

Jeżeli szereg (skalarny) *natężeń* R_1, R_2, R_3, ... wektorów $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$, ... :

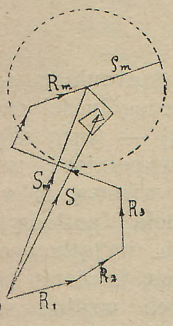
$$(44) \qquad \sigma = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

jest zbieżny, bez względu na porządek wyrazów, wówczas *szereg wektorowy*

$$(45) \qquad S = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

z pewnością będzie *zbieżny*. Suma S_m pierwszych m wyrazów szeregu (45) ułożonych w łańcuch będzie mianowicie wektorem prowadzącym z punktu O (początku R_1) do końca tego łańcucha (Fig. 9.); jeżeli więc resztę szeregu skalarnego (44) przynależną do pierwszych m wyrazów oznaczymy przez ρ_m (t. j. położymy $\sigma = R_1 + \ldots + R_m + \rho_m$), koniec wektora S_m będzie się poruszał, przy wzrastającem bezgranicznie m, wewnątrz kuli o promieniu ρ_m, lub mniej-

szej (albowiem natężenie sumy wektorów jest *mniejsze*, a najwyżej *równe*, sumie ich natężeń). Ponieważ zaś przy rosnącem m reszta ρ_m — według założenia — maleje bez granic, przeto koniec wektora $\mathbf{S}_m$ będzie, przy rosnącem m, odbywał wahania w przestrzeni kulistej o promieniu malejącym bezgranicznie, t. j. szereg wektorowy (45) będzie zbieżny. *)



(Fig. 9.).

Przejdźmy z kolei do rozważenia zależności wektora od *przestrzeni*, t. j. własności związanych z *rozmieszczeniem* wektora w danem polu.

Powiadamy, że pole wektorowe jest *ciągłe* (przestrzenie), jeżeli odpowiedni wektor, powiedzmy $\mathbf{R}$, zmienia się w niem, przy przejściu od punktu do punktu, w sposób ciągły, zarówno ze względu na swe natężenie jak i na kierunek. Z ciągłości wektora $\mathbf{R}$ wynika bezpośrednio ciągłość wszystkich trzech składowych jego R_1, R_2, R_3 (wzdłuż $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, lub też zresztą względem dowolnego układu skośnokątnego), i odwrotnie: z ciągłości R_1, R_2, R_3 wynika ciągłość $\mathbf{R}$ pod względem kierunku i natężenia.

Oznaczając przez l długość (skalarną) mierzoną w dowolnym kierunku po prostej przeprowadzonej w polu $\mathbf{R}$, możemy mówić o pochodnej wektora $\mathbf{R}$ *w tym kierunku*, oznaczając ją przez $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial l}$, zupełnie tak samo, jak mówiliśmy o pochodnej wektora ze względu na czas. Pochodna taka, jeżeli wogóle istnieje, będzie również wektorem o pewnem natężeniu i o pewnym kierunku. Dla pola jednostajnego mamy w każdym punkcie i dla każdego kierunku l: $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial l} = 0$.

Pisząc np. $\mathbf{R} = \mathbf{i}R_1 + \mathbf{j}R_2 + \mathbf{k}R_3$, mamy, zgodnie z (42):

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial l} = \mathbf{i}\frac{\partial R_1}{\partial l} + \mathbf{j}\frac{\partial R_2}{\partial l} + \mathbf{k}\frac{\partial R_3}{\partial l}. \tag{46}$$

Założenie istnienia pochodnej $\mathbf{R}$ względem l jest zresztą równoważne z założeniem istnienia pochodnych R_1, R_2, R_3 względem tegoż skalara l.

Podobnie też można mówić o pochodnych 2-go i wyższych rzędów wektora $\mathbf{R}$ względem skalarów mierzonych w jednym i tym samym lub też w różnych kierunkach. Oznaczając np. przez x, y, z

*) Ciekawem byłoby zbadanie wpływu porządku wyrazów wektorowych na wartość sumy szeregu, dla którego szereg odpowiednich natężeń *nie* jest bezwzględnie zbieżnym, t. j. posiada sumę zależną od ugrupowania swych wyrazów skalarnych. Badania takie wychodzą atoli po za ramy niniejszego dziełka.

„spółrzędne“ czyli długości (skalarne) mierzone w kierunkach **i**, **j**, **k**, możemy utworzyć pochodne

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z}, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial x \partial y}, \text{ i t. d.}$$

Linię, której kierunek zlewa się wszędzie z kierunkiem odpowiedniego wektora **R**, nazywamy *linią pola*, w szczególności zaś, gdy **R** jest siłą (np. elektryczną lub magnetyczną) — *linią siły;* jeżeli **R** jest prędkością ruchu, np. w przestrzeni wypełnionej wodą, mówimy o *linii prądu*, jeżeli **R** jest prędkością wirową, mówimy o *linii wirowej*, i t. d. Istnienie takiej linii pola (posiadającej wogóle w każdym punkcie jednę, a w pewnych wyjątkowych punktach dwie określone styczne) implikuje oczywiście istnienie pochodnej wektora **R** względem skalarów l mierzonych wzdłuż samych przynajmniej kierunków **R**. W punktach, w których wektor **R** jest nieciągły ze względu na swój kierunek, linia pola doznaje załamania (jak np. linia siły magnetycznej na granicy powietrza i żelaza), zresztą zaś będzie stopniowo zakrzywiona. Linie pola jednostajnego są oczywiście proste.

Kierunek linii pola *zgodny* z kierunkiem odpowiedniego wektora nazywamy kierunkiem *dodatnim* takiej linii; kierunek zaś wprost przeciwny — *ujemnym*.

Oznaczając przez d**L** element wektorowy linji pola w kięrunku dodatnim, przez *dn* zaś (nieskończenie małą) wielkość skalarną, możemy powyższemu określeniu linii pola nadać kształt równania różniczkowego

$$\mathrm{d}\mathbf{L} = \mathbf{R}.\, dn. \tag{47}$$

Oznaczając składowe elementu wektorowego d**L** w kierunkach **i**, **j**, **k** przez dx, dy, dz, możemy zamiast (47) napisać równania różniczkowe linii pola:

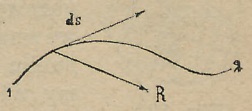
$$\mathrm{dx} : \mathrm{dy} : \mathrm{dz} = \mathrm{R}_1 : \mathrm{R}_2 : \mathrm{R}_3. \tag{47a}$$

Skoro **R** posiada wszędzie jednoznacznie określony kierunek, przez każdy punkt pola można przeprowadzić jednę i tylko jednę linię pola. Innemi słowy: dwie linie pola nie przecinają się wzajemnie.

Przeprowadzając przez każdy punkt krzywej zamkniętej, dowolnej (byle tylko nie linii pola), odpowiednią linię pola, otrzymamy tak zwaną *rurkę* wektora **R**, a więc np. *rurkę siły*, gdy **R** jest siłą, *rurkę prądu*, gdy **R** jest prądem, co do natężenia i kierunku, i tak dalej. Całe pole wektorowe można podzielić na takie rurki. Ponieważ dwie linie pola nie przecinają się wzajemnie, przeto i rurki te nie przenikają jedna do drugiej, lecz biegną obok siebie.

Wyobraźmy sobie w polu wektorowem **R** dowolną krzywą ciągłą 12 (Fig. 10.), o elementach prostolinijnych; niechaj *wektor*

$d\mathbf{s}$ będzie jej elementem, co do długości i kierunku, który uważamy jako dodatni, gdy wskazuje od 1 ku 2. Utwórzmy, w każdym punkcie tej krzywej, iloczyn rzutu wektora $\mathbf{R}$ na kierunek $d\mathbf{s}$ i długości ds, t. j. iloczyn skalarny $\mathbf{R}d\mathbf{s}$, i rozważmy całkę tego wyrazu wziętą wzdłuż tej krzywej od punktu 1 do punktu 2, oznaczając ją krótko przez I_{12}, t. j.:



(Fig. 10.).

$$(48) \qquad I_{12} = \int_1^2 \mathbf{R}d\mathbf{s}.$$

Całka ta nazywa się *całką liniową* wektora $\mathbf{R}$ wzdłuż danej krzywej 12.

W szczególności, jeżeli linia całkowania s jest *zamknięta*, oznaczymy całkę linjową naszego wektora przez

$$(49) \qquad I_{(s)} = \int_{(s)} \mathbf{R}d\mathbf{s},$$

obierając jeden z kierunków obiegu krzywej s jako *dodatni*, wprost przeciwny zaś—jako ujemny.

Odwracając kierunek całkowania wzdłuż dowolnej krzywej 12, mamy

$$(50) \qquad I_{21} = -I_{12},$$

tudzież, dla krzywej zamkniętej:

$$(51) \qquad I_{(s)} = -I_{(-s)},$$

albowiem ze zmianą kierunku $d\mathbf{s}$ zmienia się znak iloczynu $\mathbf{R}d\mathbf{s}$.

Jeżeli połączymy dowolne dwa punkty a, b obwodu zamkniętego s dowolną krzywą ciągłą c (Fig. 11.), otrzymamy więc

$$(52) \qquad I_{adbca} + I_{acbea} = I_{(s)};$$

albowiem $I_{adbca} = I_{adb} + I_{bca}$, $I_{acbea} = I_{bea} = I_{acb}$, i $I_{acb} = -I_{bca}$.

(Fig. 11.).

Oznaczając obwód zamknięty adbca przez s_1, zaś acbea przez s_2, możemy, zamiast (52), napisać:

$$(52a) \qquad I_{(s)} = I_{(s_1)} + I_{(s_2)}.$$

Podobnie też, roskładając dany obwód s przez dowolną sieć linij ciągłych na obwody s_1, s_2, s_3, i t. d. (Fig. 12), otrzymamy

$$(53) \qquad I_{(s)} = I_{(s_1)} + I_{(s_2)} + I_{(s_3)} + \dots .$$

Możemy przez dany obwód s położyć dowolną powierzchnię σ i na tej powierzchni rozciągnąć ową sieć linij. Obierzmy jednę ze stron powierzchni σ jako jej stronę *dodatnią*, drugą jako ujemną. *)

*) Wykluczam tu powierzchnie *jednostronne*, jak np. powierzchnię *Möbiusa*, której model otrzymujemy, skręcając pasek papieru nieparzystą liczbę razy i zlepiając następnie jego końce.

Jako *obieg dodatni* dowolnego obwodu na tej powierzchni będziemy uważali obieg w kierunku odwrotnym strzałek zegarowych dla widza stojącego na dodatniej stronie σ wewnątrz tego obwodu; jako ujemny — obieg w kierunku wprost przeciwnym. Treść wzoru (53) będziemy więc mogli wyrazić w sposób następujący.

(Fig. 12.).

Twierdzenie V. Całka liniowa wektora **R** wzdłuż obwodu powierzchni σ równa się sumie algebraicznej całek liniowych wzdłuż obwodów dowolnych części składowych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, na jakie rozłożono σ za pomocą dowolnej sieci linij, skoro tylko kierunek obiegu we wszystkich tych całkach jest dodatni, lub we wszystkich ujemny.

Obierając sieci linij coraz to gęstsze, możemy podzielić powierzchnię σ na części $\triangle\sigma$ dowolnie małe. Przechodząc więc do granicy, oznaczając przez s_i obwód dowolnego elementu $\triangle\sigma$ tej powierzchni i zakładając, że

$$\lim_{\triangle\sigma \to 0} \frac{I(s_i)}{\triangle\sigma} = \psi \tag{54}$$

posiada pewną określoną wielkość zależną tylko od rozmieszczenia wektora **R** w danem miejscu pola i od oryentacyi $\triangle\sigma$, nie zaś od kształtu obwodu s_i, wywnioskujemy z powyższego Twierdzenia, że całka *liniowa* $I(s)$ powinna dać się wyrazić przez całkę wielkości ψ rospostartą na powierzchnię σ ograniczoną przez s, t. j. że:

$$\int_{(s)} \mathbf{R}\,d\mathbf{s} = \int \psi\, d\sigma, \tag{55}$$

gdzie ψ, według założenia, zależy tylko od własności pola **R**, gdzie znajduje się $d\sigma$ i od oryentacyi tego elementu powierzchni, a więc np. od kierunku normalnej tego elementu. Przez $d\sigma$ rozumiemy tu wielkość *skalarną*, a mianowicie zawartość powierzchni $d\sigma$; ponieważ zaś $\mathbf{R}\,d\mathbf{s}$ jest skalarem, ψ również będzie skalarem. Otóż skalar ten (jak każdy wogóle skalar) możemy wyrazić jako iloczyn skalarny pewnego wektora ω i wektora *jednostkowego* ν w kierunku normalnej do $d\sigma$, wzniesionej po stronie *dodatniej* powierzchni σ, t. j. jako rzut pewnego wektora ω na normalną ν, czyli położyć

$$\psi = \omega\nu, \tag{56}$$

a więc napisać, zamiast (55):

$$\int_{(s)} \mathbf{R}\,d\mathbf{s} = \int \omega\nu\, d\sigma. \tag{57}$$

Zobaczymy, że *wektor* $\vec{\omega}$ nie zależy już od kierunku ν (t. j. od oryentacyi pierwotnego $\triangle\sigma$, przez zmniejszanie którego dochodzimy do granicy), lecz *jedynie od rozmieszczenia wektora* **R** w rozważa-

nej okolicy pola. Dla wektora tego zachowamy powszechnie niemal używaną nazwę „*curl*“, a więc — rozważając go w zależności od rozmieszczenia wektora **R**—napiszemy: $\omega = curl\ \mathbf{R}$, tak iż zamiast (57) będzie:

$$(58) \qquad \int_{(s)} \mathbf{R}ds = \int \nu\ \text{curl}\ \mathbf{R}.\ d\sigma.$$

Niebawem wyrazimy „*curl* **R**“ np. przez rozmieszczenie składowych prostokątnych wektora **R** wziętych względem danego układu **i, j, k.**

Całka

$$(59) \qquad F(\sigma) = \int \mathbf{A}\nu d\sigma,$$

dla dwolnego wektora **A,** rospostarta na powierzchnię σ, której ν jest normalną (jak wyżej), nazywa się *całką powierzchniową* wektora **A,** dla powierzchni σ.

Możemy więc wysłowić równ. (58) w sposób następujący.

Twierdzenie Va. Całka liniowa wektora **R** wzięta w kierunku dodatnim obwodu s równa się całce powierzchniowej wektora *curl* **R** dla dowolnej powierzchni σ ograniczonej przez s, i dla normalnej (ν) dodatniej.

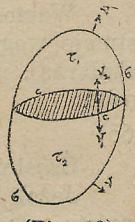
Twierdzenie to, a raczej ten jego kształt szczególny, który otrzymuje się przez wprowadzenie składowych prostokątnych wektora **R** (a który poznamy niebawem), znane jest powszechnie pod nazwą *twierdzenia Stokesa.*

Rozważmy teraz *całkę powierzchniową* wektora **R** dla powierzchni σ pomyślanej w jego polu. Odwracając w każdym jej punkcie kierunek normalnej, t. j. biorąc—ν zamiast $+\nu$, zmieniamy znak iloczynu $\mathbf{R}\nu$; otrzymamy więc równanie

$$(60) \qquad F(\sigma) = -F(\sigma),\quad {}_{+\nu} \qquad {}_{-\nu}$$

zupełnie analogiczne do równania (50) dla całki liniowej.

Niechaj σ będzie powierzchnią zamkniętą ograniczającą pewną (dowolną) część pola τ; jako normalną *dodatnią* ν uważajmy normalną skierowaną *nazewnątrz* przestrzeni τ. Za pomocą dowolnej powierzchni c podzielmy przestrzeń τ na dwie części τ_1, τ_2 (Fig. 13). Powierzchnie ograniczające całkowicie τ_1, względnie τ_2, oznaczmy przez σ_1, względnie przez σ_2, i utwórzmy sumę całek powierzchniowych $F(\sigma_1) + F(\sigma_2)$. Ponieważ normalne do powierzchni c, zewnętrzne względem τ_1 i τ_2, a mianowicie ν_1 i ν_2 mają w każdym punkcie tej powierzchni kierunki wprost sobie przeciwne, t. j. $\nu_2 = -\nu_1$, przeto w powyższej sumie całki odnoszące się do powierzchni c znoszą się wzajemnie, według (60), tak iż powstaje tylko całka



(Fig. 13).

rospostarta na pierwotną powierzchnię σ, t. j. $F(\sigma)$; mamy więc

$$F(\sigma) = F(\sigma_1) + F(\sigma_2), \tag{61}$$

analogicznie do (52a),

Podobnie też, rozkładając przestrzeń τ na dowolnie wielką liczbę objętości częściowych $\triangle\tau$ za pomocą powierzchni, z których każda stanowi część granicy przylegających do siebie objętości, i oznaczając przez σ_1, σ_2 i t. d., wogóle przez σ_i powierzchnie ograniczające całkowicie poszczególne $\triangle\tau$, mamy:

$$F(\sigma) = F(\sigma_1) + F(\sigma_2) + F(\sigma_3) + \ldots = \Sigma F(\sigma_i), \tag{62}$$

gdzie suma obejmuje wszystkie $\triangle\tau$ składające się na objętość całkowitą $\tau = \Sigma\triangle\tau$.

Mamy więc, analogicznie do Twierdz. V:

Twierdzenie VI. Całka powierzchniowa wektora **R** przez powierzchnię zamkniętą σ ograniczającą przestrzeń τ równa się sumie algebraicznej całek rozpostartych na powierzchnię dziedzin częściowych $\triangle\tau$, na jakie rozłożono dziedzinę całkowitą τ przez dowolny układ powierzchni, skoro tylko we wszystkich tych całkach weźmiemy normalną ν zewtętrzną (albo we *wszystkich* wewnętrzną).

Wprowadzając coraz to liczniejsze i gęściej rozmieszczone powierzchnie czyli przegrody, możemy podzielić daną dziedzinę pola τ na części $\triangle\tau$ dowolnie małe. Przechodząc więc do granicy i zakładając, że

$$\lim_{\triangle\tau \to 0} \frac{F(\sigma_i)}{\triangle\tau} = \rho \tag{63}$$

posiada pewną określoną wielkość zależną tylko od rozmieszczenia wektora **R** w danej okolicy pola, zaś nie od kształtu malejących bezgranicznie elementów $\triangle\tau$, otrzymamy, według (62):

$$F(\sigma) = \int_{(\sigma)} \mathbf{R}\nu d\sigma = \int_{(\tau)} \rho d\tau, \tag{64}$$

gdzie całka po prawej stronie obejmuje całą przestrzeń τ ograniczoną przez powierzchnię σ.

Wartość graniczna ilorazu we wzorze (63), o ile takowa istnieje wogóle dla danego pola **R** jako pewna określona wielkość (skalarna), nazywa się powszechnie *„divergence* **R**“ i pisze się krótko

$$\rho = \operatorname{div} \mathbf{R}. \tag{65}$$

Częstokroć będę wielkość tę nazywał *rozbieżnością* wektora **R**.

Jeżeli więc div **R** istnieje jako określona wielkość, która zresztą w pewnych okolicach może być dodatnią, w innych ujemną, w innych wreszcie zerem, mamy według (64):

Twierdzenie VIa. Jeżeli powierzchnia σ ogranicza zupełnie dziedzinę przestrzenną τ i jeżeli ν jest normalną *zewnętrzną*, natenczas:

$$\int \mathbf{R}\nu.d\sigma = \int \operatorname{div} \mathbf{R}.d\tau, \tag{66}$$

w założeniu, że wektor $\mathbf{R}$ jest *ciągły* w dziedzinie τ.

Jeżeli natomiast w dziedzinie τ istnieją pewne powierzchnie σ_1, σ_2 i t. d., wogóle σ_i, przy przejściu przez które składowa normalna wektora $\mathbf{R}$ doznaje nagłej zmiany, natenczas całki $\overset{F(\sigma_i),}{+\nu_i}$ $\overset{F(\sigma_i)}{-\nu_i}$ odnoszące się do jednej i drugiej strony takiej powierzchni nieciągłości nie znoszą się wzajemnie, lecz dają w sumie całkę

$$\int (\mathbf{R}'_i - \mathbf{R}_i)\nu_i d\sigma_i,$$

którą należy rozciągnąć na całą powierzchnię σ_i (zawartą w dziedzinie τ); $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{R}'_i$ oznaczają tu wektor $\mathbf{R}$ tuż przy σ_i, po jednej i drugiej stronie, zaś ν_i normalny do σ_i wektor jednostkowy, zwrócony ku *tej* stronie, po której panuje $\mathbf{R}_i$ (Fig. 14).

(Fig. 14.).

W tym wypadku, ogólniejszym, mamy więc zamiast (66).

$$\int \mathbf{R}\nu.d\sigma = \int \operatorname{div}\mathbf{R}.d\tau + \sum \int (\mathbf{R}'_i - \mathbf{R}_i)\,\nu_i.d\sigma_i, \tag{67}$$

gdzie suma obejmuje wszystkie powierzchnie nieciągłości przebiegające w dziedzinie τ. *).

Zestawiając Twierdzenie Va z Twierdzeniem VIa, możemy łatwo dowieść pewnej zasadniczej własności wektora *curl* $\mathbf{R}$. Położmy przez dany obwód s dwie różne powierzchnie σ_1 i σ_2, które społem tworzą powierzchnię *zamkniętą* σ ograniczającą zupełnie pewną dziedzinę przestrzenną τ. Według Twierdz. Va [wzór (58)] mamy:

$$\int_{(s)} \mathbf{R}ds = \int_{\sigma_1} \nu_1 \operatorname{curl}\mathbf{R}.d\sigma_1 = \int_{\sigma_2} \nu_2 \operatorname{curl}\mathbf{R}.d\sigma_2, \tag{68}$$

gdzie obie normalne ν_1, ν_2 są dodatnie, w powyżej objaśnionem znaczeniu słowa (Fig. 15). Ponieważ ν_2 posiada kierunek zgodny, zaś ν_1 kierunek wprost przeciwny względem normalnej ν *zewnętrz-*

*) Podobne uzupełnienie Twierdzenia Va, czyli wzoru (58), w wypadku nagłych zmian wektora $\mathbf{R}$ (w kierunku normalnym do samego wektora) poznamy w dalszym ciągu.

nej dla dziedziny τ, przeto mamy dla całej powierzchni σ ograniczającej tę dziedzinę:

$$\int_{(\sigma)} \nu \operatorname{curl} \mathbf{R}.d\sigma = \int_{\sigma_2} \nu_2 \operatorname{curl} \mathbf{R}.d\sigma_2 - \int_{\sigma_1} \nu_1 \operatorname{curl} \mathbf{R}.d\sigma_1,$$

a więc, według (68):

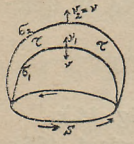
$$\int_{(\sigma)} \nu \operatorname{curl} \mathbf{R}.d\sigma = 0. \tag{69}$$

Własność ta zachodzi dla każdej powierzchni zamkniętej σ i dla dowolnie małej dziedziny τ ograniczonej przez σ; według Twierdzenin VIa mamy więc

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{R} = 0 \tag{70}$$

identycznie, t. j. dla wszelkiego pola wektorowego **R**.

Przy przejściu przez pewne powierzchnie σ_a składowa styczna curlu może być nieciągłą, lecz składowa *normalna*, t. j. ν curl **R**, zawsze będzie *ciągłą;* istotnie, gdyby tak nie było, moglibyśmy powierzchnię σ_a otoczyć z obydwu stron powłoką σ dowolnie zbliżającą się do σ_a, i otrzymalibyśmy wówczas $\int_{(\sigma)} \nu \operatorname{curl} \mathbf{R}.d\sigma \gtrless 0$.



(Fig. 15).

t. j. wynik niezgodny z równaniem (69).

Jeżeli, dla jakiegokolwiek wektora **A**, mamy $div\ \mathbf{A} = 0$ i jeżeli składowa *normalna* wektora **A** jest *ciągłą* przy przejściu przez każdą pomyślaną powierzchnię, natenczns powiadamy, że wektor **A** jest *solenoidalny* lub też, że pole **A** jest solenoidalne. Dane pole wektorowe może oczywiście być solenoidalne w pewnych swych częściach czyli dziedzinach, w innych zaś nie.

Posługując się tem określeniem, możemy powiedzieć: *curl* dowolnego wektora tworzy pole *wszędzie solenoidalne.*

Niebawem sprawdzimy jeszcze własność tę w odmienny sposób, mniej bezpośredni, a mianowicie przez zastosowanie „kartezyuszowskich“ *) rozwinięć operatorów *curl* i *div.*

Jeżeli pole wektorowe **R** jest wszędzie *solenoidalne,* mamy według powyższych uwag dla każdej powierzchni zamkniętej σ, pomyślanej w tem polu

$$\int \mathbf{R}\nu.d\sigma = 0. \tag{71}$$

Zastosujmy to równanie do części dowolnej rurki pola nieskończe-

---

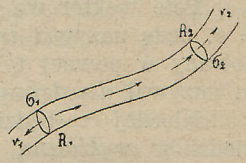
*) t. j. opierających się na roskładzie wektorów lub operacyj względem trzech osi w przestrzeni.

nie cienkiej, zawartej między dwoma przekrojami poprzecznemi σ_1, σ_2. Ponieważ na pobocznicy tej rurki mamy wszędzie $\mathbf{R}\nu = 0$, pozostają tylko wyrazy odnoszące się do przekrojów poprzecznych, o powierzchniach nieskończenie małych σ_1, σ_2; niechaj w miejscach tych przekrojów wektor $\mathbf{R}$ będzie $\mathbf{R}_1$, względnie $\mathbf{R}_2$. Według (71) mamy

$$\sigma_1 . \mathbf{R}_1\nu_1 + \sigma_2 . \mathbf{R}_2\nu_2 = 0,$$

gdzie ν_1, ν_2 są normalne zewnętrzne względem rozważanej części rurki; ponieważ zaś kierunki $\mathbf{R}_2$ i ν_2 są zgodne ze sobą, zaś kierunki $\mathbf{R}_1$ i ν_1 wprost przeciwne (fig. 16), przeto $\mathbf{R}_2\nu_2 = R_2$, $\mathbf{R}_1\nu_1 = -R_1$, a więc:

$$R_1\sigma_1 = R_2\sigma_2.$$



(Fig. 16.)

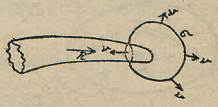
Otóż iloczyn powierzchni przekroju poprzecznego nieskończenie cienkiej rurki i natężenia odpowiedniego wektora ($R\sigma$) nazywa się *momentem rurki*.

W polu więc *solenoidalnem* każda taka rurka posiada *jeden i ten sam moment w całej swej długości*.

Momentem dowolnie grubej rurki nazywa się suma momentów rurek nieskończenie cienkich, na jakie tamtą można podzielić. Powyższa własność przysługuje więc każdej w ogóle rurce pola solenoidalnego.

W polu takiem żadna rurka nie może mieć ani początku ani końca, a więc musi tworzyć *zamknięty w sobie pierścień* albo też rosciągać się obustronnie w nieskończoność *).

Istotnie, gdyby rurka kończyła się w pewnem miejscu takiego pola, moglibyśmy otoczyć koniec jej dowolnie małą powierzchnią zamkniętą σ przecinającą rurkę jedyny raz tylko (Fig. 17), a poza tem przebiegającą w przestrzeni, gdzie $\mathbf{R} = 0$; całka więc $\int \mathbf{R}\nu d\sigma$ byłaby dla tej powierzchni zamkniętej *różną* od zera (a mianowicie równą ujemnemu momentowi rurki), wbrew równaniu (71).


(Fig. 17).

Ponieważ wektor $\omega = curl\ \mathbf{R}$ jest wszędzie solenoidaly, przeto własność powyższa przysługuje wszystkim rurkom pola ω.

Linie i rurki pola wektorowego $\omega = curl\ \mathbf{R}$ będę nazywał liniami, względnie rurkami *wirowemi* pola $\mathbf{R}$, czyli krócej *wirami* pola $\mathbf{R}$ **).

*) lub też wreszcie (jeżeli pole to jest ograniczone) mieć swój początek i koniec na granicy pola.

**) Jeżeli bowiem $\mathbf{R}$ jest np. prędkością płynu, natenczas *curl* $\mathbf{R}$ (podzielony przez 2) wyraża prędkość *wirowania*, w danem miejscu, tak iż linie wektora *curl* R są liniami wirowemi płynu.

Możemy więc powiedzieć, że *wszystkie wiry dowolnego pola wektorowego tworzą zamknięte pierścienie lub biegną obustronnie w nieskończoność.*

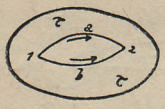
Zauważymy to jeszcze, że — w jakiemkolwiek polu solenoidalnem — rurka o momencie równym *jedności*, przy pewnym konwencyonalnym wyborze jednostek miary natężenia wektora i powierzchni, nazywa się *rurką jednostkową*, że więc gęstość takich rurek w danej okolicy pola poucza nas o natężeniu odpowiedniego wektora w tej okolicy.

Pole wektorowe **R** pozbawione wirów, t. j. dla którego *curl* **R** = o, będę nazywał *irotacyjnem* *). Jeżeli warunek ten jest zachowany w pewnej tylko, ograniczonej części pola **R**, będę ją zwykle nazywał *dziedziną irotacyjną.*

Niechaj τ będzie dziedziną irotacyjną pola **R**, a mianowicie dziedziną *acykliczną* czyli *jednospójną* **). W dziedzinie takiej możemy każdy obwód zamknięty s zredukować do punktu przez ciągłe zwężanie, nie przerywając go ani też nie wyprowadzając go nigdy po za granice tej dziedziny. Skoro więc dziedzina ta jest *irotacyjna*, możemy przez każdy obwód s położyć ciągłą powierzchnię σ, której nie przeszywa żadna rurka wirowa. Według Twierdz. V-a otrzymamy więc dla każdego obwodu s przebiegającego całkowicie w dziedzinie τ:

$$(72) \qquad I_{(s)} = \int_{(s)} \mathbf{R} d\mathbf{s} = 0.$$

Jeżeli więc 1, 2 są dwa dowolne punkty obrane na takim obwodzie (Fig 18), a więc dwa dowolne punkty dziedziny τ, mamy



(Fig: 18).

$$0 = I_{(s)} = I_{1a2} + I_{2b1} = I_{1a2} - I_{1b2},$$

czyli

$$(73) \qquad I_{1a2} = I_{1b2},$$

t. j. całka liniowa wektora **R** posiada *jednę i tę samą wartość dla wszelkich możliwych dróg* prowadzących z jednego i tego samego punktu początkowego 1 do jednego i tego samego punktu końcowego 2 i nie przekraczających granic dziedziny τ. Innemi słowy:

całka $I_{12} = \int_1^2 \mathbf{R} d\mathbf{s}$ jest jednowartościową funkcyą położenia pun-

---

*) t. j. nie-rotacyjnem, niewirowem.

**) *à connexion simple, einfach zusammenhaengend*, — jak np. przestrzeń ograniczona przez powierzchnię kulistą i zawarta w niej, lub też pozostała przestrzeń zewnętrzna.

któw 1, 2 w dziedzinie τ. Obierając więc raz na zawsze jako „punkt początkowy" dowolny punkt o tej dziedziny i oznaczając przez p dowolny punkt ruchomy tejże dziedziny, możemy napisać

$$(74) \qquad \int_o^p \mathbf{R}d\mathbf{s} = -\varphi,$$

gdzie φ jest *jednowartościową funkcyą położenia punktu* p, tak dobraną, iż dla punktu o jest $\varphi = \varphi_0 = 0$. Innemi słowy: dla dowolnego elementu liniowego $d\mathbf{s}$ w dziedzinie τ iloczyn skalarny $\mathbf{R}d\mathbf{s}$ jest *różniczką zupełną* pewnej funkcyi położenia — φ:

$$(75) \qquad \mathbf{R}d\mathbf{s} = -d\varphi.$$

Otóż, jeżeli stosunek ten zachodzi w ogóle (t. j. dla funkcyi φ niekoniecznie jednowartościowej), nazywamy funkcyę φ *potencyałem wektora* $\mathbf{R}$. Zauważmy, że funkcya ta jest *skalarem* podobnie jak $\mathbf{R}d\mathbf{s}$.

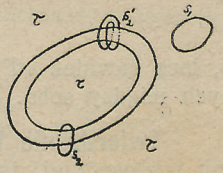
Wynik powyższy możemy teraz wysłowić w sposób następujący.

Twierdzenie VII. W dziedzinie *irotacyjnej acyklicznej*, czyli jednospójnej, wektor $\mathbf{R}$ posiada *potencyał jednowartościowy*.

Jeżeli dziedzina ta obejmuje np. całą przestrzeń nieograniczoną, natenczas wektor $\mathbf{R}$ posiada potencyał jednowartościowy, bez wszelkich zastrzeżeń.

Niechaj teraz dziedzina irotacyjna τ pola $\mathbf{R}$ będzie *cykliczna*, czyli *wielospójna* *). Wówczas wszelkie możliwe w dziedzinie tej obwody zamknięte dają się podzielić na dwie klasy: do klasy *pierwszej* zaliczymy te obwody, które przez ciągłe zacieśnianie i bez przekroczenia granic τ *dają* się zredukować do punktu, do *drugiej* klasy — te obwody, które w sposób taki do punktu sprowadzić się *nie dają*.

Jeżeli τ jest np. dziedziną leżącą nazewnątrz pierścienia zamkniętego (Fig. 19), natenczas dowolny obwód s_1 niespleciony z tym pierścieniem będzie należał do pierwszej, natomiast obwód splecion y z nim jedno — lub wielokrotnie, jak s_2 lub s_2', do drugiej klasy.



(Fig. 19).

Otóż przez obwód s pierwszej klasy możemy zawsze położyć powierzchnię ciągłą σ rozciągającą się całkowicie w dziedzinie irotacyjnej τ. Według Twierdz. V-a będzie więc *dla każdego obwodu pierwszej klasy*:

---

*) *à connexion multiple, mehrfach zusammenhaengend*; tak np. wnętrze pierścienia zamkniętego lub pozostała przestrzeń zewnętrzna stanowią dziedziny *dwuspójne*, przestrzeń otaczająca 2, 3 ... n takich pierścieni (splecionych wzajemnie lub też nie) stanowi dziedzinę o *spójności potrójnej*, względnie *poczwórnej*, ... $(n + 1)$ — krotnej.

$$\int_{(s)} \mathbf{R}\,d\mathbf{s} = 0.$$

Dwie drogi całkowicie *a*, *b*, które biegną w dziedzinie τ od dowolnego punktu początkowego *o* do dowolnego punktu końcowego *p* i które dają się sprowadzić do wzajemnej kongruencyi przez ciągłe odkształcanie, bez rozerwania i bez przekroczenia granic dziedziny τ, możemy nazwać drogami zgodnemi lub *równoważnemi*. Otóż, odwracając jednę z tych dróg i łącząc je z drugą, otrzymamy obwód zamknięty *oapbo pierwszej klasy*, a więc:

$$0 = I_{oapbo} = I_{oap} + I_{pbo},$$

t. j.

$$I_{oap} = I_{obp}.$$

Obierając więc raz na zawsze pewien (dowolny zresztą) punkt „początkowy" *o* w dziedzinie τ, możemy powiedzieć, że

$$\int_{o}^{p} \mathbf{R}\,d\mathbf{s} = -\varphi$$

jest *dla wszelkich dróg równoważnych* prowadzących do punktu *p* funkcyą *jednowartościową* położenia tego punktu w dziedzinie τ, — podobnie jak w poprzedniem rozumowaniu.

Jeżeli jednak dwie drogi *oap*, *obp nie* są równoważne, natenczas *oapbo* będzie obwodem *drugiej* klasy, tak iż przez obwód ten nie będziemy mogli położyć powierzchni σ, która nie wykraczałaby po za granice dziedziny irotacyjnej; wówczas więc całka I_{oapbo} będzie w ogóle różną od zera, a więc też $I_{oap} \gtrless I_{obp}$. Całka więc $\int_{o}^{p} \mathbf{R}\,d\mathbf{s}$ będzie miała wartość zależną nietylko od położenia punktu *p*, lecz również od wyboru jednej z możliwych dróg nierównoważnych między sobą. Innemi słowy:

Twierdzenie VIII. W dziedzinie *irotacyjnej cyklicznej* (dwu— lub wielospójnej) istnieje również potencyał określony przez związek $\mathbf{R}\,d\mathbf{s} = -d\varphi$, lecz potencyał ten jest funkcyą *wielowartościową* położenia punktu w tej dziedzinie.

Twierdzeniu temu możemy nadać kształt nieco odmienny, a mianowicie bardziej określony.

Istotnie, pomyślmy sobie dowolne pole wektorowe **R** obejmujące całą przestrzeń nieograniczoną. Niechaj pole to posiada dowolną liczbę (*n*) wirów czyli rurek wirowych 1, 2, ... *n* o momentach $I_1, I_2, \ldots I_n$. Ponieważ każdy z tych wirów jest zamkniętym

w sobie pierścieniem lub biegnie obustronnie w nieskończoność, przeto po wykluczeniu ich pozostała przestrzeń będzie dziedziną (τ) irotacyjną cykliczną, a mianowicie o spójności $(n + 1)$ — krotnej. Obwód s przebiegający całkowicie w tej dziedzinie τ i niespleciony z żadnym z tych wirów będzie należał do pierwszej klasy, wszystkie inne obwody natomiast będą należały do drugiej klasy.

Niechaj s_1 będzie obwodem (drugiej klasy) splecionym *jednokrotnie* z wirem 1 i obiegającym wir ten w kierunku *dodatnim*, i niechaj s_2, s_3, ... s_n mają podobne znaczenie względem wirów 2, 3, ... n. Obwody te s_1, s_2, ... s_n możemy nazwać *cyklami niezależnemi* dziedziny irotacyjnej τ.

Powierzchnię σ położoną przez obwód s_1 przeszywa wir 1, a mianowicie w kierunku dodatnim i jedyny raz tylko *); według twierdzenia Stokes'a i według określenia momentu rurki wirowej mamy więc dla obwodu s_1: $\int \mathbf{R} ds = I_1$, i podobnie dla pozostałych cyklów niezależnych s_2, ... s_n, t. j.

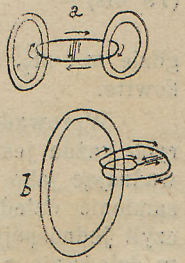
$$\int_{(s_i)} \mathbf{R} ds = I_i, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{76}$$

Najogólniejszym, dającym się w dziedzinie τ pomyśleć, obwodem jest obwód s oplatający dowolną liczbę m_1 razy wir 1, podobnie m_2 razy wir 2, i t. d., m_n razy wir n **). Otóż obwód taki (s) daje się zawsze zredukować (przez dodanie dróg przebieganych *w jednym i w drugim kierunku*, dla których więc całki liniowe niweczą się wzajemnie ***) do m_1 obiegów cyklu s_1, m_2 obiegów cyklu s_2, ... m_n obiegów cyklu s_n.

---

*) Inne wiry mogą ją przeszywać również, lecz tylko *parzystą* liczbę razy, a mianowicie tyleż razy w kierunku dodatnim, ile w ujemnym, tak iż odpowiednie przyczynki do całki $\int \nu \mathrm{curl}\mathbf{R} \cdot d\sigma$ znoszą się wzajemnie.

**) Jeżeli m_i jest liczbą dodatnią, względnie ujemną, obwód s oplata wir i tyleż razy w kierunku dodatnim, względnie ujemnym, lub też, ogólniej, a razy w kierunku dodatnim i b razy w kierunku ujemnym, lub też ogólniej, a razy w kierunku dodatnim i b razy w kierunku ujemnym, tak iż $a - b = m_i$, co zresztą na jedno wychodzi; albowiem obwód oplatający dany wir tyleż razy w kierunku dodatnim, ile w ujemnym, wcale z wirem tym nie jest spleciony.



(Fig. 20a i 20b).

***) Fig. 20a daje nam przykład takiej redukcyi dla obwodu oplatającego jednocześnie pierścień 1 i pierścień 2, po jednym razie każdy, zaś Fig. 20b wskazuje redukcyę obwodu oplatającego *dwukrotnie* jeden i ten sam pierścień; dla lepszego ujęcia tych stosunków polecam czytelnikowi sporządzenie modelu z drutu i nici, na wzór Fig. 20b i podobnie dla splotów 3- i wielokrotnych.

Mamy więc dla *najogólniejszego* obwodu s w dziedzinie τ:

$$(77) \qquad \int_{(s)} \mathbf{R}ds = m_1 I_1 + m_2 I_2 + \ldots + m_n I_n = \sum_1^n m_i I_i,$$

gdzie m_1, m_2, ... m_n są dowolne i niezależne od siebie liczby całkowite, dodatnie lub ujemne.

Przypuśćmy, że zgodzono się na to (konwencyonalnie), aby ze stałego punktu „początkowego“ o wychodzić zawsze z wartością potencyału $\varphi = o$. Niechaj L będzie *pewną przepisaną* drogą prowadzącą w dziedzinie τ od punktu o do dowolnego punktu p i niechaj Φ będzie odpowiednią wartością potencyału w punkcie p, t. j.

$$I_{oLp} = -\Phi.$$

Niechaj l będzie dowolną, jakąkolwiek, drogą prowadzącą z o do p (w tejże dziedzinie τ); odpowiednią zaś wartość potencyału w punkcie p oznaczmy przez φ, t. j. połóżmy

$$I_{olp} = -\varphi.$$

Ponieważ $oLplo$ jest obwodem zamkniętym, przeto według (77) będzie, w najogólniejszym wypadku:

$$I_{oLplo} = I_{oLp} + I_{plo} = -\Phi + \varphi = \sum_1^n m_i I_i,$$

t. j.

$$(78) \qquad \varphi = \Phi + \sum_1^n m_i I_i.$$

Możemy więc wygłosić

Twierdzenie VIIIa. Wielowartościowość potencyału w dziedzinie irotacyjnej otaczającej n wirów o momentach $I_1, I_2, \ldots I_n$ jest scharakteryzowana przez wzór

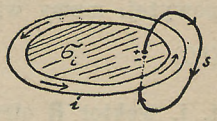
$$(78 \text{ bis}) \qquad \varphi = \Phi + \sum_1^n m_i I_i,$$

gdzie m_1, m_2, ... m_n są dowolne i niezależne od siebie liczby całkowite.

Wprowadzając zresztą t. zw. *baryery* czyli *diafragmy*, z których każda jest ograniczona przez odpowiedni wir pola **R**, i wprowadzając jako warunek *nieprzekraczalność* tych n przegród, możemy zamienić dziedzinę irotacyjną cykliczną τ na dziedzinę *acykliczną*, czyli jednospójną; nazwijmy ją τ'. Potencyał φ, wielowartościowy w dziedzinie τ, stanie się wówczas *jedno*wartościową funkcyą położenia punktu *w dziedzinie* τ'. Niechaj σ_i będzie diafragmą położo-

ną przez wir i; natenczas całkując wzdłuż drogi s biegnącej *od* dowolnego punktu położonego na stronie *dodatniej* σ_i *do* odpowiedniego punktu po stronie *ujemnej* otrzymamy $\int \mathbf{R} ds = I_i$ (Fig. 21).

Możemy więc uważać diafragmę σ_i jako powierzchnię *nieciągłości* potencyału φ, taką mianowicie, że przy przekrozeniu jej *od strony* $+$ *do strony* $-$ *funkcya* φ *doznaje skoku równego momentowi* $+ I_i$ *odpowiedniego wiru.*



(Fig. 21).

Skok ten jest oczywiście jednakowy dla każdej pary odpowiadających sobie punktów danej diafragmy.

Dla całego pola będziemy mieli *n takich powierzchni nieciągłości potencyału* φ.

Zauważmy zresztą, że kształt tych powierzchni jest dowolny, byle tylko każda z nich była ograniczona przez jeden i tylko przez jeden wir pola.

Wróćmy teraz do samego wektora **R**, którego potencyałem (w dziedzinie irotacyjnej) ma być funkcya φ.

Według powyższego określenia potencyału mamy dla elementu liniowego $d\mathbf{s}$ o *dowolnym* kierunku (i o długości ds):

$$\mathbf{R}ds = -d\varphi, \tag{75bis}$$

gdzie $d\varphi$ jest przyrostem skalara φ odpowiadającym przejściu od początku do końca tegoż elementu. Dzieląc obustronnie przez *natężenie* wektora $d\mathbf{s}$, t. j. przez długość skalarną elementu ds i pisząc krótko $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ dla pochodnej φ względem długości (skalarnej) mierzonej wzdłuż rozważanego kierunku $d\mathbf{s}$, mamy zamiast (75)

$$R \cdot \cos(\mathbf{R}, d\mathbf{s}) = -\frac{\partial\varphi}{\partial s},$$

czyli krócej

$$R_s = -\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \tag{79}$$

gdzie R_s jest składową (skalarną) wektora **R** w rozważanym kierunku.

Rozważmy powierzchnię *izopotencyalną*, t. j. powierzchnię $\varphi = \text{const.}$, przechodzącą przez dany punkt dziedziny irotacyjnej. Ponieważ dla wszelkich $d\mathbf{s}$ stycznych do tej powierzchni mamy $d\varphi = 0$, t. j., według (75):

$$\mathbf{R}ds = 0,$$

przeto wektor *wypadkowy* **R** *będzie normalny do powierzchni izopotencyalnej*. Stąd też wynika natychmiast, że powierzchnie izopotencyalne są *normalne do linij*, a więc też i do *rurek pola*.

Oznaczając przez ν wektor *jednostkowy* w kierunku normalnej do powierzchni $\varphi = \text{const.}$ i rozumiejąc $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ zupełnie podobnie jak $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ powyżej, mamy więc dla wektora **R**:

$$\mathbf{R} = -\nu \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \tag{80}$$

t. j. wektor **R** otrzymuje się z odpowiedniego potencyału przez zastowanie operatora $-\nu \frac{\partial}{\partial \nu}$ (gdzie $\frac{\partial}{\partial \nu}$ jest symbolem pochodnej ze względu na długość *skalarną* mierzoną w kierunku ν).

Operator $\nu \frac{\partial}{\partial \nu}$ jest identyczny, w zastosowaniu do funkcyi *skalarnej*, z operatorem odkrytym przez *Hamiltona*, który oznaczył on przez ∇. Posługując się więc tym symbolem, możemy zamiast (80) napisać:

$$\mathbf{R} = -\nabla \varphi. \tag{81}$$

Jeżeli ψ jest *jakąkolwiek skalarną* funkcyą położenia, mamy, jako określenie nasze operatora ∇:

$$\nabla \psi = \nu \frac{\partial \psi}{\partial \nu}, \tag{82}$$

czyli symbolicznie

$$\nabla = \nu \frac{\partial}{\partial \nu}, \tag{82a}$$

gdzie ν jest wektorem jednostkowym normalnym do powierzchni $\psi = \text{const.}$

Dotychczas więc wolno nam stosować operator ∇ *li tylko do funkcyj skalarnych*. Niebawem atoli rozciągniemy stosowalność jego również do *wektorów*, t. j. do wektorowych funkcyj położenia w przestrzeni.

Opierając się na powyższem określeniu możemy łatwo wyrazić ∇ np. przez wektory jednostkowe normalne **i**, **j**, **k** i przez „derywatory" $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, czyli symbole pochodnych względem długości (skalarnych) x, y, z mierzonych w kierunkach **i**, względnie **j**, **k**. Istotnie, oznaczając na chwilę wektor $\nabla \psi$ przez **S**, zaś skła-

dowe jego w kierunkach **i**, **j**, **k** przez S_1, S_2, S_3, tak iż $\mathbf{S} = \mathbf{i}S_1 + \mathbf{j}S_2 + \mathbf{k}S_3$, mamy, podobnie jak w (79):

$$S_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad S_2 = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad S_3 = \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

a więc

$$\mathbf{S} = \nabla\psi = \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

tak iż żądane rozwinięcie operatora ∇ będzie:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{83}$$

Ten to właśnie szczególny kształt operatora Hamiltona jest powszechnie znany.

Zobaczymy teraz, że w zastosowaniu do *wektora*, powiedzmy **R**, operator ∇ daje dwie poprzednio określone, dla wszelkich pól wektorowych zasadniczo ważne wielkości, a mianowicie *div* **R** i *curl* **R**, zależnie od sposobu operowania.

Lecz takie rozszerzenie stosowalności do wypadków nieprzewidzianych w pierwotnem naszem określeniu wymaga przedewszystkiem pewnych objaśnień i pewnych — że tak powiem — konwencyj.

Otóż zgódźmy się mianowicie na to, aby uważać ∇ jako pewien „wektor", którego „składowe" nie są jednak zwykłemi wielkościami skalarnemi lecz *operatorami*, a mianowicie derywatorami $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, o ile chodzi o układ osi **i**, **j**, **k** [według (83)].

Wówczas, wzorując się na pojęciach: iloczynu skalarnego **AB** i iloczynu wektorowego V**AB** dwóch zwykłych wektorów **A**, **B**, możemy zastosować operator ∇ do wektora **R** bądź to *skalarnie* bądź to wektorowo, pisząc $\nabla\mathbf{R}$, względnie $\mathrm{V}\nabla\mathbf{R}$, z tem jednak zastrzeżeniem, że ∇ (jako operator) musi *poprzedzać* **R** (jako rzeczywisty wektor, na którym mamy operować).

Naśladując więc wzory (4) i (8) lub (8'), t. j. pisząc w nich ∇ zamiast **A** i **R** zamiast **B**, czyli $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ zamiast A_1, A_2, A_3 i R_1, R_2, R_3 zamiast B_1, B_2, B_3, otrzymamy:

$$\nabla\mathbf{R} = \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y} + \frac{\partial R_3}{\partial z}, \tag{84}$$

$$\mathrm{V}\nabla\mathbf{R} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial R_3}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial R_1}{\partial z} - \frac{\partial R_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial R_1}{\partial y}\right) \tag{85}$$

czyli — symbolicznie —

$$(85') \qquad V\nabla\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix}.$$

$\nabla\mathbf{R}$ jest więc pewnym *skalarem*, zaś $V\nabla\mathbf{R}$ pierwszym *wektorem*, a określeń tych dwóch wielkości możemy tymczasem upatrywać we wzorach (84), względnie (85) czyli (85').

Wróćmy teraz do skalara *div* **R** i do wektora *curl* **R**, które określiliśmy poprzednio *nie uciekając się do żadnych w ogóle układów osi*, lecz opierając się jedynie na *własnościach pola* **R**, tak iż możemy z góry być pewni, że ani *div* **R** ani *curl* **R** *od wyboru takich układów nie zależą*.

W celu porównania z wzorami (84), (85) dla $\nabla\mathbf{R}$ i $V\nabla\mathbf{R}$ wystarcza obecnie zbudować wyrazy *div* **R** i *curl* **R** przy umyślnem użyciu tych samych właśnie wektorów jednostkowych **i, j, k** i spółrzędnych x, y, z, które występują w tych dwóch wzorach.

Otóż stosując określenie *div* **R** [dane we wzorach (63), (65)] do prostopadłościanu o krawędziach $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z$ równoległych do **i, j, k** i malejących bezgranicznie, i pamiętając, że w tym wypadku jest ustawicznie $\triangle\tau = \triangle x . \triangle y . \triangle z$, otrzymamy łatwo dla *tej* części $Lim\left(\frac{F}{\triangle\tau}\right)$, która odpowiada dwóm ścianom równoległym do **j, k**, t. j, do osi spółrzędnych y, z, wyraz następujący:

$$\left[-R_1\, dydz + \left(R_1 + \frac{\partial R_1}{\partial x} dx\right) dydz \right] : d\tau = \frac{\partial R_1}{\partial x};$$

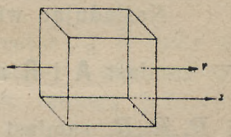
podobnie też dla pary ścian równoległych do osi z, x otrzymamy wyraz $\frac{\partial R_2}{\partial y}$, zaś dla ścian równoległych do osi x, y — wyraz $\frac{\partial R_3}{\partial z}$, a więc biorąc sumę tych wyrazów:

$$(86) \qquad \text{div}\,\mathbf{R} = \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y} + \frac{\partial R_3}{\partial z}.$$

Mamy przeto, według (84):

$$(87) \qquad \nabla\mathbf{R} = \text{div}\,\mathbf{R},$$

jak zapowiedziano wyżej.



(Fig. 22).

Aby otrzymać składową ω_1 wektora $\omega =$ $= curl\ \mathbf{R}$ zastosujmy pierwotne nasze określenie [dane we wzorach (54), (56)] do prostokąta 1234 o bokach równoległych do osi y i z (patrz Fig. 23); biorąc całkę liniową wektora **R** w kierunku strzałek, otrzymamy:

$$= I_{12341} = \left[R_3 + \tfrac{1}{2} \frac{\partial R_3}{\partial y} dy \right] dz - \left[R_2 + \tfrac{1}{2} \frac{\partial R_2}{\partial z} dz \right] dy$$

$$-\left[R_3 - \tfrac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial y}\,dy\right]dz + \left[R_2 - \tfrac{1}{2}\frac{\partial R_2}{\partial z}\,dz\right]dy$$
$$= \left(\frac{\partial R_3}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial z}\right)dydz,$$

a więc, dzieląc przez powierzchnię ptostokąta $d\sigma = dy.dz$:

$$\omega_1 = \frac{\partial R_3}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial z}.$$

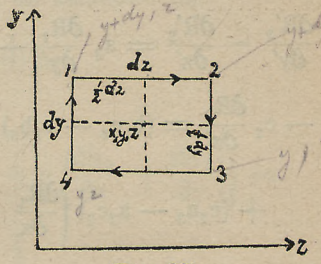
Przez perumtacyę cykliczną skaźników 1,2,3 i spółrzędnych x, y, z otrzymamy stąd natychmiast składowe ω_2 i ω_3 wektora ω, a więc:

$$(88)\quad \text{curl } \mathbf{R} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial R_3}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial R_1}{\partial z} - \frac{\partial R_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial R_2}{dx} - \frac{\partial R_1}{dy}\right)$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{dy} & \frac{\partial}{dz} \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix}$$

tak iż, według (85), mamy identycznie:

$$(89)\qquad V\nabla\mathbf{R} = \text{curl } \mathbf{R}.$$

Z okazanych tym sposobem identyczności (87), (89) i z powyższych uwag widzimy, że $\nabla\mathbf{R}$ i $V\nabla\mathbf{R}$, określone pierwotnie przez (84) i (85), nie zależą od wyboru układu spółrzędnych, lecz tylko od właściwości samego pola $\mathbf{R}$ (podobnie jak $\nabla\psi$ zależy tylko od właściwości skalara ψ jako funkcyi położenia w przestrzeni). Pomimo to nie będzie bez korzyści, jeżeli dowiedziemy niezależności tej na jednym chociażby przykładzie.



(Fig. 23).

Weźmy np. jako nowy układ O' (x',y',z') również prostokątny i prawoskrętny, lecz o początku O' i kierunkach osi x',y',z' różnych od pierwotnych O,x,y,z. Oznaczając przez e_1,e_2,e_3 spółrzędne punktu O' w układzie pierwotnym, zaś przez a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 dostawy kierunkowe osi nowego układu względem osi pierwotnych, mamy:

$$(90)\quad x' = e_1 + a_1x + b_1y + c_1z, y' = e_2 + a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$z' = e_3 + a_3x + b_3y + c_3z, \quad \text{— i odwrotnie}$$

$$(91)\quad \begin{cases} x = a_1(x' - e_1) + a_2(y' - e_2) + a_3(z' - e_3), \\ y = b_1(x' - e_1) + b_2(y' - e_2) + \ \ (\ \ ' - e_3), \\ z = c_1(x' - e_1) + c_2(y' - e_2) + c_3(z' - \ \ ). \end{cases}$$

Oznaczając składowe wektora **R** wzdłuż nowych osi przez R'_1, R'_2, R'_3, mamy

$$(92)\quad R'_1 = a_1R_1 + b_1R_2 + c_1R_3,\ R'_2 = a_2R_1 + b_2R_2 + c_2R_3,$$
$$R'_3 = a_3R_1 + b_3R_2 + c_3R_3.$$

Pisząc $\nabla'\mathbf{R}$, $V\nabla'\mathbf{R}$ w nowym układzie, dla odróżnienia od $\nabla\mathbf{R}$, $V\nabla\mathbf{R}$ wziętych względem pierwotnego układu, mamy

$$\nabla'\mathbf{R} = \frac{\partial R'_1}{\partial x'} + \frac{\partial R'_2}{\partial y'} + \frac{\partial R'_3}{\partial z'} = a_1\frac{\partial R_1}{\partial x'} + a_2\frac{\partial R_1}{\partial y'} + a_3\frac{\partial R_1}{\partial z'} +$$

$$+ \ldots \text{ [według (92)]} = \left(a_1\frac{\partial}{\partial x'} + a_2\frac{\partial}{\partial y'} + a_3\frac{\partial}{\partial z'}\right)R_1 +$$

$$+\left(b_1\frac{\partial}{\partial x'} + b_2\frac{\partial}{\partial y'} + b_3\frac{\partial}{\partial z'}\right)R_2 + \left(c_1\frac{\partial}{\partial x'} + c_2\frac{\partial}{\partial y'} + c_3\frac{\partial}{\partial z'}\right)R_3$$

$$= \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y} + \frac{\partial R_3}{\partial z} \text{ [według (90)]},$$

a więc: $\nabla'\mathbf{R} = \nabla\mathbf{R}$, co było do dowiedzenia.

Podobnie też otrzymamy dla pierwszej składowej wektora $V\nabla'\mathbf{R}$ (t. j. równoległej do osi x'):

$$\frac{\partial R'_3}{\partial y'} - \frac{\partial R'_2}{\partial z'} = a_3\frac{\partial R_1}{\partial y'} + b_3\frac{\partial R_2}{\partial y'} + c_3\frac{\partial R_3}{\partial y'} - a_2\frac{\partial R_1}{\partial z'} - b_2\frac{\partial R_3}{\partial z'} -$$

$$- c_2\frac{\partial R_3}{\partial z'} = (b_2c_3 - c_2b_3)\left(\frac{\partial R_3}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial z}\right) +$$

$$+ (c_2a_3 - a_2c_3)\left(\frac{\partial R_1}{\partial z} - \frac{\partial R_3}{\partial x}\right) + (a_2b_3 - b_2a_3)\left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial R_1}{\partial y}\right);$$

lecz, jak wiadomo:

$$b_2c_3 - c_2b_3 = a_1,\ c_2a_3 - a_2c_3 = b_1,\ a_2b_3 - b_2a_3 = c_1,$$

a więc:

$$\frac{\partial R'_3}{\partial y'} - \frac{\partial R'_2}{oz'} = a_1\left(\frac{\partial R_3}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial z}\right) + b_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial z} - \frac{\partial R_3}{\partial x}\right) +$$

$$+ c_1\left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial R_1}{\partial y}\right),$$

t. j., jeżeli oznaczymy składowe wektora $V\nabla\mathbf{R}$ względem osi pierwotnych przez u_1, u_2, u_3, zaś składowe wektora $V\nabla'\mathbf{R}$ względem nowych osi przez u_1', u_2', u_3':

$$u_1' = a_1u_1 + b_1u_2 + c_1u_3;$$

zupełnie podobnie znajdziemy:

$$u_2' = a_2u_1 + b_2u_2 + c_2u_3,$$

$$u_3' = a_3u_1 + b_3u_2 + c_3u_3.$$

Stąd zaś widzimy, że u_1', u_2', u_3' i u_1, u_2, u_3 są składowemi *jednego i tego samego wektora wypadkowego* wzdłuż różnych układów osi: x',y',z', względnie x, y, z, t. j. że:

$$V\nabla'\mathbf{R} = V\nabla\mathbf{R},$$

czego właśnie chcieliśmy dowieść.

Według (87) i (89) możemy napisać dwa zasadnicze twierdzenia zawarte we wzorach (58) i (66) w postaci:

$$\int_{(s)} \mathbf{R}\,d\mathbf{s} = \int \nu V\nabla\mathbf{R}.d\sigma, \tag{58a}$$

$$\int R\nu.d\sigma = \int \nabla\mathbf{R}.d\tau, \tag{66a}$$

albo też jeszcze, uciekając się do rozwinięć (85), (84) i oznaczając przez l, m, n składowe wektora jednostkowego ν, czyli dostawy kierunkowe normalnej ν, zaś przez dx, dy, dz składowe $d\mathbf{s}$:

$$\int_{(s)} (R_1dx + R_2dy + R_3dz) =$$

$$= \int \left\{ l\left(\frac{\partial R_3}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial z}\right) + m\left(\frac{\partial R_1}{\partial z} - \frac{\partial R_3}{\partial x}\right) + n\left(\frac{\partial R_2}{\partial x} + \frac{\partial R_1}{\partial y}\right)\right\} d\sigma$$

$$= \int \begin{vmatrix} l & m & n \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} . d\sigma,$$

$$\int (R_1l + R_2m + R_3n)\,d\sigma = \int \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y} + \frac{\partial R_3}{\partial z}\right) d\tau. \tag{66b}$$

Nazwa „twierdzenia Stokesa“ stosuje się właśnie do postaci (58b) wzoru (58); właściwa atoli treść tego twierdzenia jest oczywiście wyrażona prościej i bezpośredniej we wzorze wektorowym (58) lub (58a). To samo dotyczy też wzoru (66) w porównaniu z jego postacią szczególną (66b).

Niebacząc na identyczności wyrażone przez (87) i (89) będziemy w dalszym ciągu pisali prawie wyłącznie *div* **R**, względnie

curl **R** (nie zaś $\nabla\mathbf{R}$, $V\nabla\mathbf{R}$), zachowując jednak zawsze symbol ∇ operatora Hamiltona w zastosowaniu do *skalara*; jeżeli więc np, **R** posiada potencyał φ, będziemy pisali zawsze $\mathbf{R} = -\nabla\varphi$. Ze względu na znaczenie tego operatora w zastosowaniu do *skalara*, według pierwotnego naszego określenia (82a), możemy $-\nabla\varphi$ nazwać *spadkiem* funkcyi φ.

Gdzie niegdzie atoli, szczególniej zaś w rachunkach przejściowych i w dowodzeniach, napiszemy $\nabla\mathbf{R}$, $V\nabla\mathbf{R}$ (zamiast *div* **R**, *curl* **R**), uważając ∇ jako „wektor symboliczny“ o „składowych“ $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. To bowiem częstokroć jest korzystne.

Tak np. mieliśmy [wzór (70)]: *div curl* $\mathbf{R} = 0$, dla dowolnego wektora **R**; otóż wzór ten możemy napisać, w myśl ostatniej uwagi:

(70a) $$\nabla V \nabla \mathbf{R} = 0,$$

a postać ta ma *tę* zaletę, że odpowiada zupełnie własności rzeczywistych, czyli zwykłych wektorów, dla których jest

$$AVAB = 0;$$

moglibyśmy nawet otrzymać wzór (70) pierwotnie na tej właśnie drodze, a następnie sprawdzić go ewentualnie, uciekając się do rozwinięć kartezyuszowskich (84) i (85),

Operatorowi ∇, jak wynika bezpośrednio np. z (83), przysługuje prawo *rozdzielnościowe* w zastosowaniu do *sumy* dwóch lub więcej skalarów lub wektorów; mamy więc dla dwóch skalarów φ, ψ:

(93) $$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi,$$

zaś dla dwóch wektorów **R**,**S**:

(94) $\nabla(\mathbf{R} + \mathbf{S}) = \nabla\mathbf{R} + \nabla\mathbf{S}$, t. j. div $(\mathbf{R} + \mathbf{S})$ = div **R** + div **S**,

(95) $V\nabla(\mathbf{R}+\mathbf{S}) = V\nabla\mathbf{R} + V\nabla\mathbf{S}$, t. j. curl $(\mathbf{R}+\mathbf{S})$ = curl **R** + curl **S**,

zupełnie jak gdyby ∇ było zwykłym wektorem.

W zastosowaniu do *iloczynu* dwóch skalarów lub dwóch wektorów należy wyraźnie uwzględnić, że „składowe“ operatora ∇ są derywatorami $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, że więc mamy np. $\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi) =$

$$= \varphi \frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{RS}) = \mathbf{R}\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial x} + \mathbf{S}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} V\mathbf{RS} =$$

$$= V\mathbf{R}\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial x} + V\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}\mathbf{S}.$$

Otrzymamy więc przedewszystkiem dla dwóch *skalarów* φ, ψ:

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi \cdot \nabla\psi + \psi \cdot \nabla\varphi. \tag{96}$$

Gdy zaś chodzi o wektory **R**, **S**, należy odróżnić iloczyn skalarny **RS** od wektorowego V**RS**; do każdego z nich można zastosować operator ∇. Ponieważ jednak **RS** jest skalarem, może być mowa tylko o „spadku“ **RS**, t. j. o ∇(**RS**) [*nie zaś* o V∇(**RS**)]; dla ∇(**RS**) mamy

$$\nabla(\mathbf{RS}) = \left[\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right](\mathbf{RS}), \tag{97}$$

gdzie zresztą można napisać $\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{RS}) = \mathbf{R}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} + \mathbf{S}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}$ i t. d.

Biorąc natomiast iloczyn *wektorowy*, a więc wektor V**RS**, możemy doń zastosować ∇ bądź to skalarnie, bądź też wektorowo, t. j. utworzyć

$$\text{div } \mathbf{VRS} = \nabla\mathbf{VRS}$$

lub też

$$\text{curl } \mathbf{VRS} = \mathbf{V}\nabla\mathbf{VRS}.$$

Otóż rozwińmy te wyrazy, szczególniej ze względu na to, że znajdują one (a przynajmniej pierwszy z nich) ważne zastosowanie w teoryi zjawisk elektromagnetycznych.

Gdyby ∇ było zwykłym wektorem, powiedzmy **A**, mielibyśmy według Twierdz. III:

$$\mathbf{AVRS} = \mathbf{SVAR} = -\mathbf{RVAS};$$

gdyby wektor **S** był *stałym* (w przestrzeni), mielibyśmy więc, zastępując **A** przez ∇: $\nabla\mathbf{VRS} = \mathbf{SV}\nabla\mathbf{R} = \mathbf{S}$ curl **R**; podobnie też, gdyby wektor **R** był stałym, zaś **S** zmiennym, mielibyśmy: $\nabla\mathbf{VRS} = -\mathbf{RV}\nabla\mathbf{S} = -\mathbf{R}$ curl **S**; w ogólnym więc wypadku, t. j. gdy obadwa wektory są zmienne w przestrzeni, należy wziąć sumę tych wyrazów (albowiem derywatory tkwiące w ∇ posiadają własność $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{VRS} = \mathbf{VR}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} + \mathbf{V}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\mathbf{S}$). Rozciągając więc Twierdzenie III do wektora symbolicznego ∇, mielibyśmy:

$$\text{div } \mathbf{VRS} = \mathbf{S} \text{ curl } \mathbf{R} - \mathbf{R} \text{ curl } \mathbf{S}, \tag{98}$$

t. j. = iloczynowi skalarnemu drugiego wektora (**S**) przez *curl* pierwszego (**R**) *mniej* ilocz. skal. pierwszego przez *curl* drugiego.

Podobnie też, stosując do V∇V**RS** wzór (12), otrzymamy:

$$\text{curl } \mathbf{VRS} = \mathbf{V}\nabla\mathbf{VRS} = \mathbf{R}(\nabla\mathbf{S}) - \mathbf{S}(\nabla\mathbf{R}) + (\mathbf{S}\nabla)\mathbf{R} - (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{S},$$

t. j.

(99) $$\text{curl } \mathbf{VRS} = \mathbf{R} \cdot \text{div } \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \text{div } \mathbf{R} + (\mathbf{S}\nabla)\mathbf{R} - (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{S},$$

gdzie $(\mathbf{S}\nabla)$ jest operatorem złożonym z **S** i ∇ zupełnie tak samo jak iloczyn skalarny z dwóch zwykłych wektorów; oznaczając przez S_1, S_2, S_3 składowe **S**, mamy $(\mathbf{S}\nabla) = S_1\frac{\partial}{\partial x} + S_2\frac{\partial}{\partial y} + S_3\frac{\partial}{\partial z}$; także same znaczenie ma operator $(\mathbf{R}\nabla)$ we wzorze (99).

Skoro już otrzymaliśmy żądane dwa wzory [(98) i (99)] na *tej* drodze, która niejednemu wyda się dość wątpliwą, możemy je sprawdzić, uciekając się do rozwinięć kartezyuszowskich iloczynu **VRS** i operatorów *div* i *curl*, a sprawdzenie takie jest o tyle łatwiejsze od zbudowania samych wzorów, o ile gotowe już wzory dają nam wskazówkę co do sposobu ugrupowania wyrazów dość licznych w rozwinięciu kartezyuszowskiem.

Istotnie, rozwijając **VRS** i wyrażając, według (84) i (87), *div* tego wektora jako sumę pochodnych jego składowych względem x, y, z, mamy:

$$\text{div } \mathbf{VRS} = \frac{\partial}{\partial x}(R_2S_3 - R_3S_2) + \frac{\partial}{\partial y}(R_3S_1 - R_1S_3) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(R_1S_2 - R_2S_1) =$$

$$S_1\left(\frac{\partial R_3}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial z}\right) + S_2\left(\frac{\partial R_1}{\partial z} - \frac{\partial R_3}{\partial x}\right) + S_3\left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial R_1}{\partial y}\right) \quad \text{a)}$$

$$- R_1\left(\frac{\partial S_3}{\partial y} - \frac{\partial S_2}{\partial z}\right) - \ldots\ldots; \quad \text{b)}$$

lecz wyrazy w nawiasach w wierszu (a) są, według (89) i (85), składowemi *curl* **R**, nawiasy zaś w wierszu (b) zamykają składowe *curl* **S**; mamy więc (a) + (b) = **S** *curl* **R** — **R** *curl* **S**, q. e. d. Podobne sprawdzenie wzoru (99) pozostawiam czytelnikowi.

Wspomniałem już krótko, przed chwilą, o znaczeniu operatora $(\mathbf{S}\nabla)$; ze względu na jego częstą stosowalność wracam tu doń znowu.

W symbolu tym litera **S** może oznaczać dowolny wektor; we wszystkich wypadkach, w których obawa o nieporozumienie byłaby płonną, opuszczę nawiasy, pisząc krótko $\mathbf{S}\nabla$. Wiemy już, że w rozwinięciu kartezyuszowskiem jest

(100) $$\mathbf{S}\nabla = S_1\frac{\partial}{\partial x} + S_2\frac{\partial}{\partial y} + S_3\frac{\partial}{\partial z}.$$

W **S** i w ∇, wziętych z osobna, tkwiły własności kierunkowe, lecz te znikły zupełnie dzięki skojarzeniu skalarnemu **S** i ∇; dla tego też powiedziałbym o operatorze $\mathbf{S}\nabla$, że posiada on *charakter skalarny*.

W najściślejszym związku z tem pozostaje następująca własność tego operatora: jeżeli zastosujemy go do funkcyi *skalarnej*, otrzymamy w wyniku również pewien *skalar*, stosując go do funkcyi *wektorowej*, otrzymamy w wyniku *wektor* *).

Jeżeli zresztą chodzi o *skalar*, powiedzmy φ, mamy

$$(101)\quad (\mathbf{S}\nabla)\,\varphi = S_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \ldots = \mathbf{S}\left[\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] = \mathbf{S}\,(\nabla\varphi);$$

w tym więc wypadku możemy z pewnością opuścić nawiasy, t. j. napisać $\mathbf{S}\nabla\varphi$.

Gdy natomiast chodzi o *wektor*, powiedzmy $\mathbf{R}$, należy postąpić ostrożniej; albowiem $(\mathbf{S}\nabla)\,\mathbf{R}$ jest określone przez

$$(102)\quad (\mathbf{S}\nabla)\,\mathbf{R} = S_1 \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x} + S_2 \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y} + S_3 \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z} = \mathbf{i}\,.\,(\mathbf{S}\nabla)R_1 + \mathbf{j}\,.\,(\mathbf{S}\nabla)R_2 + \mathbf{k}\,.\,(\mathbf{S}\nabla)R_3,$$

podczas gdy $\mathbf{S}\,(\nabla\mathbf{R})$ ma zupełnie inne znaczenie, a mianowicie:

$$(103)\qquad \mathbf{S}\,(\nabla\mathbf{R}) = \mathbf{S}\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{R};$$

w wypadkach więc *tego* rodzaju zachowamy nawiasy.

Zauważmy, że skoro φ jest skalarem, — $\nabla\varphi$ jest jego „spadkiem“ wypadkowym, t. j. wektorem o *tym* kierunku, w którym φ maleje najszybciej; skoro więc (zamiast $\mathbf{S}$) weźmiemy dowolny wektor *jednostkowy* $\mathbf{s}$, otrzymamy w wyrazie

$$-\mathbf{s}\nabla\varphi = -(\mathbf{s}\nabla)\varphi = -\mathbf{s}(\nabla\varphi)$$

nic innego jak tylko składową wektora — $\nabla\varphi$ w kierunku $\mathbf{s}$, t. j. *spadek funkcyi* φ *w kierunku* $\mathbf{s}$ (na jednostkę długości).

Jeżeli np. φ jest potencyałem siły elektrycznej R, natenczas $-\mathbf{s}\nabla\varphi$ będzie składową tej siły w kierunku $\mathbf{s}$.

Stąd też widzimy, że dla każdego wektora *jednostkowego* $\mathbf{s}$ można napisać

$$(104)\qquad \mathbf{s}\nabla = \frac{\partial}{\partial s},$$

czyli, że $\mathbf{s}\nabla$ jest poprostu równoważne tak zwanemu różniczkowaniu „osiowemu“ (wzdłuż osi s). Dla *dowolnego* zaś wektora $\mathbf{n}$ mamy

---

*) Podczas gdy np. *div*, który *nie* jest operatorem o „charakterze skalarnym“ *nie posiada* tej własności: $\mathbf{R}$ jest wektorem, zaś *div* $\mathbf{R}$ skalarem *div* zresztą do skalara w ogóle nie daje się zastosować.

(105) $$\mathbf{n}\nabla = \mathrm{n}\frac{\partial}{\partial \mathrm{n}}.$$

Z omawianego tu operatora można skorzystać szczególniej gdy zachodzą następujące okoliczności:

Wobraźmy sobie przestrzeń τ, dla której dana jest funkcya skalarna jakakolwiek ψ, lub w której rostacza się pole wektorowe **R**; ψ lub **R** mogą też zmieniać się z czasem t; oznaczmy prędkość zmiany (ψ lub **R**) w danym, dowolnym, punkcie przestrzeni τ przez $\frac{\partial}{\partial t}$; możemy ją nazwać prędkością *zmiany lokalnej*.

Niechaj teraz w przestrzeni τ porusza się punkt P (jeżeli chcemy,— cząstka materyalna) z prędkością określoną co do wielkości i kierunku przez wektor **v** (sam ten wektor również może być zmienny). Możemy wówczas mówić o prędkości zmiany (ψ lub **R**) w *tym punkcie ruchomym* P; dla odróżnienia oznaczmy *tę* prędkość zmiany przez $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$. Otóż między $\frac{\partial}{\partial t}$ i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$ zachodzi związek, który łatwo możemy wyrazić uciekając się do operatora $\mathbf{v}\nabla$. Istotnie, oznaczając pochodną wziętą wzdłuż kierunku prędkości **v** przez $\frac{\partial}{\partial \mathrm{h}}$, mamy (w założeniu, oczywiście, że rozmieszczenie ψ lub **R** jest ciągłe w przestrzeni τ i że dopuszcza pochodną taką):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial}{\partial \mathrm{h}},$$ zarówno dla ψ jak dla **R**.

Otóż, zamiast tego, możemy według powyższych uwag napisać

(106) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla,$$

t. j. $$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\psi, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{R}.$$

Możemy też wyobrazić sobie, że przestrzeń τ (lub pewna jej część) jest wypełniona układem *ciągłym* takich punktów ruchomych P, np. płynem; wówczas $\frac{\partial}{\partial t}$ będzie zmianą lokalną w przestrzeni τ, zaś $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$ zmianą (ψ lub **R**) w *indywidualnej* cząstce tego układu, np. płynu; w tym też wypadku będzie dla każdej indywidual-

nej cząstki $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla$, gdzie $\mathbf{v}$ jest *jej* prędkością w przestrzeni τ, i może mieć różne wielkości i kierunki dla różnych cząstek indywidualnych.

Tak więc np. równanie różniczkowe ruchu płynu (o gęstości ρ) da się napisać krótko

$$(a)\quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \mathbf{F},$$

gdzie p jest ciśnieniem, $\mathbf{F}$ zaś siłą zewnętrzną (obliczoną na jednostkę objętości); również łatwo otrzymujemy t. zw. „równanie ciągłości", t. j. równanie wyrażające niezmienność masy każdej indywidualnej cząstki płynu; istotnie, oznaczając przez $\delta\tau$ objętość takiej cząstki indywidualnej, mamy bezpośrednio jako wyraz tego warunku: $\frac{d}{dt}(\rho\delta\tau) = 0$, t. j. $\delta\tau \cdot \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d}{dt}(\delta\tau) = 0$; otóż, oznaczając na chwilę składowe prędkości $\mathbf{v}$ wzdłuż trzech osi prostokątnych x, y, z (nieruchomych w τ) przez v_1, v_2, v_3, mamy — jak wiadomo — $\frac{d}{dt}(\delta\tau) = \delta\tau \cdot \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right]$, t. j. $= \delta\tau \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}$; zaś według powyższych uwag jest $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\rho$; poszukiwane więc równanie daje się napisać:

$$0 = \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Ponieważ

$$\mathbf{v}\nabla\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{v}\nabla\rho + \rho\nabla\mathbf{v} = \nabla(\rho\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\ ^*),$$

przeto równanie ciągłości możemy też napisać w postaci

---

*) Możemy to łatwo sprawdzić, uciekając się do x, y, z; istotnie mamy:

$$\mathbf{v}\nabla\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{dy} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right),$$

t. j. $= \frac{\partial}{\partial x}(\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})$, q. e. d.

$$(b)\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

w której treść występuje w sposób bardziej oczywisty: zmniejszanie się *lokalne* gęstości ρ = rozbieżności (div) prądu $(\rho \mathbf{v})$, t. j. ubytek masy w nieruchomym elemencie pomyślanym w przestrzeni τ równa się sumie algebraicznej mas wypływających z tego elementy przez ograniczającą go powierzchnię.

Możemy skorzystać z operatora $\mathbf{v}\nabla$ jeszcze w innym nieco kierunku. Wyobraźmy sobie w przestrzeni τ (jako dziedzinie skalara ψ lub wektora $\mathbf{R}$) dowolny „układ spółrzędnych“ S', *sztywny*, a więc mogący poruszać się li tylko jako jedna całość z dowolną prędkością postępową $\mathbf{v}_0$ i z dowolną prędkością obrotową ω. Wyobraźmy sobie rój obserwatorów przykutych raz na zawsze do tego układu S', a więc towarzyszących mu w jego ruchu. Niechaj $\mathbf{r}'$ (wektor) określa położenie jednego z tych obserwatorów *w układzie* S', t. j. niechaj wektor $\mathbf{r}'$ biegnie od pewnego punktu „początkowego“ O' obranego na osi obrotu (ω) w układzie S' do rozważanego obserwatora. Wówczas prędkość jego $\mathbf{v}$ względem τ będzie oczywiście

$$(107)\qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + V\omega\mathbf{r}';$$

$\mathbf{r}'$ będzie różne, lecz $\mathbf{v}_0$, ω będą jedne i też same dla wszystkich obserwatorów. Otóż oznaczmy znowu zmianę „lokalną“ (ψ lub $\mathbf{R}$) przez $\frac{\partial}{\partial t}$, zaś zmianę badaną z placówki jednego z tych obserwatorów przez $\frac{d}{dt}$; wówczas znowu będzie

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla, \text{ t. j.}$$

$$(108)\qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0\nabla + (V\omega\mathbf{r}'.\nabla), \text{ dla } \psi \text{ lub } \mathbf{R}.$$

Częstokroć napotykamy zagadnienia następującego rodzaju. Jakieś pole $\mathbf{R}$ zmienia się z czasem w przestrzeni τ, lecz jest „stateczne“ czyli niezmienne z punktu widzenia obserwatorów związanych z układem S'. Wówczas mamy $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = 0$ (aczkolwiek $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}$ nie znika); możemy więc skorzystać z tego i napisać w dotyczących równaniach różniczkowych

$$(109)\qquad \frac{\partial}{\partial t} = -\mathbf{v}\nabla = -\mathbf{v}_0\nabla - (V\omega\mathbf{r}'.\nabla),$$

t. j., wyrażając $\frac{\partial}{\partial t}$ przez operatory czysto przestrzenne, zmniejszyć tym sposobem liczbę zmiennych niezależnych o 1. Stosunki te upraszczają się znakomicie, jeżeli układ S' (wraz z obserwatorami) posiada ruch *czysto postępowy*; wówczas wektor $\mathbf{r}'$, różny dla różnych obserwatorów, staje się obojętnym dla rozważanej sprawy, o ile mianowicie $\omega = 0$, a więc $V\omega\mathbf{r}' = 0$, tak iż mamy dla wszystkich owych obserwatorów, bez względu na ich położenie w S':

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\mathbf{v}_0 \nabla = -v_0 \frac{\partial}{\partial x}, \tag{109a}$$

jeżeli np. zgodzimy się na to, aby mierzyć długość x w kierunku owej prędkości postępowej $\mathbf{v}_0$.

Pozostawiając przedmiot ten, rozważmy obecnie pewne przynajmniej, a mianowicie nader płodne w zastosowania do różnych dziedzin fizyki matematycznej, „iteracye“, czyli powtórzenia operatora ∇ wziętego bądź to skalarnie, bądź to wektorowo.

Jeżeli φ jest funkcyą skalarną, mamy oczywiście *curl* $\nabla\varphi = 0$, albowiem pierwsza np. składowa tego wyrazu będzie

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial y} = 0,$$ i podobnie też znikają identycznie dwie pozostałe składowe. Innemi słowy: wektor posiadający potencyał jest irotacyjnym. O przedmiocie tym mówiliśmy już wyżej. Dodamy tu więc jeszcze tylko to, że powyższe równanie identyczne daje się napisać

$$V\nabla\nabla\varphi = 0, \tag{110}$$

i że w tej postaci jest ono szczególnie pouczające ze względu na analogię do wzoru $V\mathbf{AA}\varphi = 0$, zachodzącego dla *zwykłego* wektora $\mathbf{A}$, który we wzorze (110) jest zastąpiony przez wektor symboliczny ∇ (porówn. poprzednie w tymże duchu uczynione uwagi).

Powyżej zastosowaliśmy ∇ (do skalara φ) najprzód skalarnie, a następnie wektorowo. Zastosujmy go teraz *obadwa* razy skalarnie albo też obadwa razy wektorowo.

Zacznijmy od pierwszej kombinacyi, a to mianowicie w zastosowaniu do funkcyi *skalarnej* φ.

$\nabla\varphi$ jest pewnym wektorem w ogóle zmiennym w przestrzeni; otóż do wektora tego zastosujmy ∇ skalarnie; otrzymamy przedewszystkiem, ze względu na (87):

$$\nabla(\nabla\varphi) = \operatorname{div} \nabla\varphi;$$

w tym zresztą wypadku możemy bez obawy o nieporozumienie opuścić nawiasy i napisać

(111) $\nabla\nabla\varphi$ lub krócej $\nabla^2\varphi = \text{div}\,\nabla\varphi$.

Uciekając się do osi **i, j, k,** t. j, biorąc $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \ldots$ i uwzględniając że $\mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0$, możemy też dla operatora ∇^2 napisać:

(112) $$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

co zresztą sprawdza się też przez zastosowanie (84) i (87) do (111). Przez skalarne powtórzenie ∇ otrzymujemy tedy operator ∇^2 o *charakterze skalarnym*. Możemy więc ∇^2 zastosować też natychmiast, bez dalszych objaśnień, do *wektora* **R**, co zresztą widzimy też stąd, że pisząc $\mathbf{R} = \mathbf{i}R_1 + \mathbf{j}R_2 + \mathbf{k}R_3$, mamy $\nabla^2\mathbf{R} = \mathbf{i}.\nabla^2R_1 + \mathbf{j}.\nabla^2R_2 + \mathbf{k}.\nabla^2R_3$, gdzie R_1, R_2, R_3 jako skalary zastępują po prostu poprzedni skalar φ. Oczywiście jednak $\nabla^2\varphi$ jest skalarem, zaś $\nabla^2\mathbf{R}$ — wektorem *).

Pisząc $-\nabla\varphi = \mathbf{R}$, mamy według (111) i (112):

(113) $$\text{div}\,\mathbf{R} = -\nabla^2\varphi = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),$$

t. j.: rozbieżność wektora irotacyjnego $= -\nabla^2$ (potencyał tegoż wektora).

Operator ∇^2, a mianowicie w postaci kartezyuszowskiej (112), znany jest powszechnie pod nazwą „operatora *Laplace'a*"; on to bowiem występuje w odkrytem przez Laplace'a równaniu różniczkowem $\frac{\partial^2V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2V}{\partial z^2} = 0$, dla potencyału V siły grawitacyjnej nazewnątrz materyi ważkiej.

---

*) Zachodzi ta tylko różnica, że dla wektora nie moglibyśmy napisać $\nabla\nabla\mathbf{R}$, albowiem byłby to symbol dwuznaczny; istotnie mamy

$$\nabla(\nabla\mathbf{R}) = \nabla\,\text{div}\,\mathbf{R} = \mathbf{i}\left[\frac{\partial^2R_1}{dx^2} + \frac{\partial^2R_2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2R_3}{\partial x\partial z}\right] + \ldots,$$

podczas gdy $(\nabla\nabla)\mathbf{R}$ czyli $\nabla^2\mathbf{R} = \mathbf{i}.\nabla^2R_1 + \ldots =$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial^2R_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2R_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2R_1}{\partial z^2}\right] + \ldots;$$

wektor więc $\nabla(\nabla\mathbf{R})$ ma zupełnie inne składowe niż $(\nabla\nabla)\mathbf{R}$. Pisząc jednak ∇^2 zamiast $\nabla\nabla$ unikamy wszelkich nieporozumień, zarówno dla skalara φ, jak i dla wektora **R**.

Jeżeli wektor **R** *nie* posiada potencyału, nie może oczywiście być mowy o wzorze (113). Dla *wektora* **R** będziemy zresztą *zawsze* pisali $\nabla^2\mathbf{R}$ (zamiast $\nabla\nabla\mathbf{R}$, co byłoby dwuznacznem; patrz uwagę do str. 49) w odróżnieniu od $\nabla(\nabla\mathbf{R})$ czyli ∇ div **R**.

Przejdźmy teraz do ∇ wziętego dwukrotnie *wektorowo*, t. j. do $V\nabla V\nabla$ czyli do *curl curl* [patrz (89)], zamiast czego napiszemy krócej $curl^2$. Operacya ta, jak sam już zresztą jednokrotny *curl*, może być stosowana, oczywiście, *tylko do wektora*, nie zaś do skalara. Otóż, aby otrzymać pewne, nader wygodne w zastosowania, przekształcenie $curl^2$ **R**, napiszmy wyraz ten umyślnie w postaci $V\nabla V\nabla\mathbf{R}$ i zastosujmy doń wzór (12) tak jak gdyby chodziło, o zwykłe wektory (co już uczyniliśmy kilkakrotnie).

Pisząc w (12) **B** = **A** i **R** zamiast **C**, mamy przedewszystkiem

$$V\mathbf{A}V\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{R}) - A^2.\mathbf{R}$$

(gdzie A^2 i **AR**) są skalarami). Otóż, pozwalając sobie zastąpić w tym wzorze wektor **A** przez „wektor symboliczny“ t. j. przez operator ∇ o charakterze wektorowym, otrzymamy

$$curl^2\mathbf{R} = V\nabla V\nabla\mathbf{R} = \nabla(\nabla\mathbf{R}) - \nabla^2\mathbf{R},$$

t. j.

$$curl^2\mathbf{R} = \nabla \text{ div } \mathbf{R} - \nabla^2\mathbf{R}. \tag{114}$$

Wzór ten, aczkolwiek wyprowadzony na drodze mogącej wydać się wątpliwą, jest istotnie prawdziwy; sprawdzenie zaś jego za pomocą rozwinięć kartezyuszowskich, według (85) i (89), pozostawiam czytelnikowi.

Jeżeli wektor **R** jest *solenoidalny*, t. j. jeżeli *div* **R** = o, mamy, według (114):

$$curl^2\mathbf{R} = -\nabla^2\mathbf{R}. \tag{114a}$$

Podobnie też moglibyśmy zastosować operacyę *curl*, czyli $V\nabla$, do wektora **R** trzy, cztery i t. d. razy; w wyniku otrzymamy za każdym razem wektor, który możemy napisać krótko $curl^3$ **R**, $curl^4$ **R**, i t. d.

Godną uwagi jest okoliczność, że iterując operacyę ∇ (skalarnie) na wektorze **R**, mamy *naprzemian skalary i wektory*: $\nabla\mathbf{R}$ = = div **R** = skal., $\nabla(\nabla\mathbf{R}) = \nabla$ div **R** = wekt., $\nabla[\nabla(\nabla\mathbf{R})] = \nabla(\nabla$ div **R**) = ∇^2 div **R** = skal., i t. d.; iterując natomiast $V\nabla$ (wektorowo) otrzymujemy *zawsze wektory*: $V\nabla\mathbf{R} = curl\,\mathbf{R}$, $V\nabla V\nabla\mathbf{R} = curl^2\mathbf{R}$, i t. d., zupełnie podobnie jak dla iloczynów zwykłych wektorów; istotnie: **AB** jest skalarem, **C.AB** wektorem, i t. d., natomiast wyrazy V**AB**, V**C**V**AB**, V**D**V**C**V**AB**, i t. d. są wszystkie wektorami.

Jeżeli dane jest pole wektorowe w całej swej rosciągłości, t. j. jeżeli dany jest wektor **R** jako funkcya położenia punktu w przestrzeni, możemy oczywiście bez żadnych trudności znaleźć wszystkie jego wiry i rozbieżności, t. j. obliczyć *curl* **R** i *div* **R** dla każdego punktu *). Chodzi tu bowiem tylko o wykonanie, na danem **R**, *prostych* operacyj *curl* i *div*, bądź w kształcie kartezyuszowskim [jak w (84) i (85)], bądź też w jakimkolwiek innym.

Zasadniczo trudniejszem jest natomiast zadanie *odwrotne*, a mianowicie:

Dane są wiry i rozbieżności (tudzież ewentualnie wszelkie nieciągłości), t. j. *curl* **R** i *div* **R** *dla całego pola; znaleść samo pole* **R**.

Zadania tego rodzaju posiadają wielką doniosłość nietylko w elektromagnetyzmie, lecz we wszystkich działach fizyki, w których wogóle występują wielkości wektorowe rozmieszczone w przestrzeni.

Omówimy przeto obecnie przedmiot ten, przynajmniej co do zasadniczych jego punktów.

Przedewszystkiem należy zastanowić się nad tem, czy wiry i rozbieżności określają *jednoznacznie* całe pole wektorowe, czy też nie —, innemi słowy, — czy istnieje jedno jedyne tylko pole posiadające dane wiry i rozbieżności, czy też istnieją może dwa lub więcej takich pól. (O skokach czyli nieciągłościach poszukiwanego pola **R** nie mamy potrzeby wspominać osobno, albowiem — jak zobaczymy w dalszym ciągu — są one równoważne pewnym rozmieszczeniom powierzchniowym *curl* **R** i *div* **R**, a więc są już zawarte w powyższych danych zadania. Zgodnie z tem będziemy tu milcząco zakładali, że poszukiwane pola **R** są wszędzie *ciągłe*, a przynajmniej poza siedliskiem danych wirów i rozbieżności).

Niechaj więc dla całej przestrzeni będą dane

$$\text{curl}\,\mathbf{R} = \omega, \quad \text{div}\,\mathbf{R} = \rho, \tag{115}$$

ω jako wektorowa, ρ jako skalarna funkcya położenia punktu w przestrzeni. Aby rozstrzygnąć powyższy dylemat, przypuśćmy, że isnieją *dwa* pola wektorowe $\mathbf{R}'$ i $\mathbf{R}''$, czyniące zadość warunkom (115) naszego zadania. Zobaczmy, czem i czy w ogólo pola te mogą różnić się od siebie. W tym celu rozważmy trzecie pole $\mathbf{R}_0$, które jest różnicą (wektorową) tych dwóch pól, t. j. połóżmy, dla każdego punktu przestrzeni:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''. \tag{116}$$

*) Przy oczywistem założeniu, że te w ogóle istnieją jako pewne określone wielkości, t. j. że istnieją granice wymagane przez wzory (54) i (63), a więc — innemi słowy —, że istnieją pochodne składowych **R** względem dowolnych kierunków w przestrzeni.

Według założenia mamy

$$\operatorname{curl} \mathbf{R}' = \omega, \quad \operatorname{curl} \mathbf{R}'' = \omega$$

$$\operatorname{div} \mathbf{R}' = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{R}'' = \rho,$$

a więc $\operatorname{curl} \mathbf{R}' - \operatorname{curl} \mathbf{R}'' = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{R}' - \operatorname{div} \mathbf{R}'' = 0$;

lecz według pierwotnego naszego określenia *curl* i *div* są oczywiście operacyami *rozdzielnościowemi* (co też widzimy zresztą z rozwinięć kartezyuszowskich (84) i (85)); zamiast więc dwóch ostatnich równań możemy napisać:

$$\operatorname{curl} (\mathbf{R}' - \mathbf{R}'') = 0, \quad \operatorname{div} (\mathbf{R}' - \mathbf{R}'') = 0,$$

t. j. według (116):

(117a) $$\operatorname{curl} \mathbf{R}_0 = 0$$

(117b) $$\operatorname{div} \mathbf{R}_0 = 0.$$

Pole więc $\mathbf{R}_0$ nie posiada zgoła ani wirów ani rozbieżności.

Ze względu na pierwszą własność, t. j. (117a), wektor $\mathbf{R}_0$ posiada wszędzie *potencyał* jednowartościowy; nazwijmy go φ; wówczas będzie

(118) $$\mathbf{R}_0 = -\nabla\varphi.$$

Ze względu na drugą własność, t. j. (117b), potencyał ten ma wszędzie czynić zadość równaniu $\operatorname{div} \nabla\varphi = 0$, t. j. [według wzoru (111)] równaniu różniczkowemu *Laplace'a*:

(119) $$\nabla^2\varphi = 0.$$

Ponieważ $\mathbf{R}_0$ jest wektorem ciągłym (patrz powyższą uwagę), przeto, według (118), pierwsze pochodne φ wzięte ze względu na dowolny kierunek, a więc też np. $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ są wszędzie ciągłe.

Oprócz tego sam potencyał φ rownież jest wszędzie ciągłym. Gdyby bowiem doznawał skoku, powiedzmy $\varphi_2 - \varphi_1 = c$, przy przejściu przez pewną powierzchnię, natenczas rosciągając całkę $\int \mathbf{R}_0 d\mathbf{s}$ wzdłuż dowolnej drogi s prowadzącej od dowolnego punktu 1 leżącego na jednej stronie tej powierzchni do odpowiedniego punktu 2 leżącego na drugiej stronie tejże powierzchni, otrzymalibyśmy $\int_{(s)} \mathbf{R}_0 d\mathbf{s} = c$; lecz ze względu na nieobecność wirów [t. j.

ze względu na (117a)], całka ta, a więc też wielkość c, musi znikać, według twierdzenia Stokes'a [wzór (58)].

Zbierając otrzymane wyniki, widzimy, że pola $\mathbf{R}'$ i $\mathbf{R}''$, mające te same wiry i rozbieżności, mogą różnić się od siebie li tylko o wektor $\mathbf{R}_0$, który *posiada potencyał* φ *ciągły i skończony* (skoro — jak zakładamy — $\mathbf{R}', \mathbf{R}''$, a więc też $\mathbf{R}_0$ mają być wszędzie skończenie wielkie) *wraz ze swemi pochodnemi I-go rzędu, w całej przestrzeni, i czyniący wszędzie zadość równaniu Laplace'a.*

Otóż obecnie dowiedziemy, że funkcya taka φ, przy pewnym jeszcze dodatkowym warunku (który niebawem poznamy), może tylko być wielkością *stałą* w całej przestrzeni, tak iż $\mathbf{R}_0 = 0$, a więc $\mathbf{R}' = \mathbf{R}''$.

W tym celu posłużymy się pewnym wzorem, który stanowi treść głośnego *Twierdzenia Greena*, a który możemy łatwo wyprowadzić z wzoru ogólniejszego (66):

$$\int \operatorname{div} \mathbf{R} \, . \, d\tau = \oint \mathbf{R}_\nu \, . \, d\sigma, \tag{66 bis}$$

w którym $\mathbf{R}$ może być dowolnym wektorem, byle tylko ciągłym i skończonym.

We wzorze tym położymy

$$\mathbf{R} = \psi \, . \, \nabla\varphi, \tag{120}$$

rozumiejąc (zgodnie z wygłoszonym dopiero co warunkiem dla $\mathbf{R}$) przez ψ funkcyę skalarną ciągłą i skończoną *), przez φ zaś takąż funkcyę ciągłą i skończoną *wraz ze swemi pierwszemi pochodnemi*; tej funkcyi φ *nie* utożsamiamy tymczasem bynajmniej z powyższym potencyałem „φ".

Według (120) mamy:

$$\mathbf{R}_\nu = \psi \, . \, \nu\nabla\varphi = \psi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}, \text{ [patrz wzór (104)]},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \psi \, . \operatorname{div} \nabla\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$= \psi\nabla^2\varphi + (\nabla\psi)(\nabla\varphi),$$

gdzie ostatni wyraz jest iloczynem skalarnym wektorów $\nabla\psi$ i $\nabla\varphi$; podstawiając rozwinięcia te do (66), otrzymujemy natychmiast żądany wzór Greena w postaci:

$$\int \psi\nabla^2\varphi d\tau = \int \psi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\sigma - \int (\nabla\psi)(\nabla\varphi) \, d\tau, \tag{121}$$

*) Pochodne ψ, jak $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ i t. d., mogą zresztą być nieciągłe.

gdzie $d\tau$ jest elementem przestrzeni ograniczonej przez powierzchnię σ, zaś ν normalną *zewnętrzną* elementu $d\sigma$ tej powierzchni.

Jeżeli ψ, podobnie jak φ, jest funkcyą ciągłą i skończoną *wraz* ze swemi pochodnemi I-go rzędu, mamy oczywiście oprócz (121) również

$$(121a) \qquad \int \varphi \nabla^2 \psi d\tau = \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\sigma - \int (\nabla \varphi)(\nabla \psi) d\tau,$$

a więc też, odejmując od siebie te dwa równania:

$$(122) \qquad \int (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) d\tau = \int (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}) d\sigma.$$

Przez „twierdzenie Greena“ rozumie się właściwie ogół wszystkich tych równań (121), (121a). (122).

Aby zastosować wzór (121) do naszego zagadnienia, położmy przedewszystkiem $\psi = \varphi$, utożsamiając φ z potencyałem wektora $\mathbf{R}_0$; wówczas będzie $\nabla^2 \varphi = 0$, tak iż (121) zredukuje się do:

$$(123) \qquad \int (\nabla \varphi)^2 d\tau = \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma,$$

gdzie zamiast $(\nabla \varphi)^2$ możemy napisać $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2$.

W naszym wypadku chodzi o *całą* przestrzeń; aby więc zastosować wzór (123), wyobraźmy sobie jako σ powierzchnię kulistą o promieniu $r = r_1$, zatoczoną naokoło dowolnego środka O (od którego będziemy mierzyli odległości skalarne r wszelkich punktów przestrzeni), aby następnie promień ten r_1 zwiększać bezgranicznie.

Tym sposobem otrzymamy $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r_1}$, $d\sigma = r_1^2 d\varepsilon$, gdzie $d\varepsilon$ jest elementarnym kątem bryłowym mającym swój wierzchołek w punkcie O, a więc:

$$\int (\nabla \varphi)^2 d\tau = \operatorname*{Lim}_{r_1 = \infty} \left[r_1^2 \int \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r_1} d\varepsilon \right].$$

Załóżmy teraz, że φ w bardzo wielkich odległościach od O maleje jak $\frac{1}{r}$, a więc $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ jak $\frac{1}{r^2}$; wówczas otrzymamy, rozumiejąc przez C pewną stałą skończoną:

$$\int (\nabla\varphi)^2 d\tau = \text{Lim}\left[\frac{r_1^2}{r_1^3} C \int d\varepsilon\right] = \text{Lim}\frac{4\pi C}{r_1},$$

t. j.

$$\int (\nabla\varphi)^2 d\tau = 0. \tag{124}$$

Lecz każdy element tej całki jest zasadniczo *dodatni* *); mamy więc z osobna dla każdego punktu przestrzeni $(\nabla\varphi)^2 = 0$, czyli

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = 0 \left(\text{t. j. } \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\right),$$

a więc

$$\varphi = \text{const. w całej przestrzeni,}$$

lub, bezpośredniej jeszcze, wprost ze (124):

$$\nabla\varphi = 0. \tag{125}$$

Zapowiedziany wyżej warunek nasz dodatkowy polegał na tem, iż założyliśmy, że w bardzo odległych dziedzinach φ maleje jak $\frac{1}{r}$, t. j. że $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ czyli $-\mathbf{R}_0$ [według (118)] maleje jak $\frac{1}{r^2}$.

Otóż, aby temu warunkowi uczynić zadość wystarcza założyć, że $\mathbf{R}'$ i $\mathbf{R}''$, t. j. w ogóle pola poszukiwane, a mające czynić zadość warunkom (115), posiadają natężenia malejące w bardzo wielkich odległościach jak $\frac{1}{r^2}$. Jeżeli bowiem $\mathbf{R}'$ i $\mathbf{R}''$ czynią zadość temu warunkowi, wówczas $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$ również będzie mu czyniło zadość. Wówczas zaś będzie, według ukończonych dopiero co wywodów, $\mathbf{R}_0 = -\nabla\varphi = 0$, a więc $\mathbf{R}' = \mathbf{R}''$.

Możemy więc wysłowić wynik naszych rozważań w sposób następujący:

Pole wektorowe, którego natężenie w odległościach r bardzo wielkich **) maleje jak $\frac{1}{r^2}$, jest *zupełnie jednoznacznie* określone *przez swoje wiry i rozbieżności*, t. j. przez *curl* $\mathbf{R}$ i *div* $\mathbf{R}$ (i ewen-

*) Przez φ rozumiemy bowiem funkcyę rzeczywistą, a mianowicie potencyał wektora rzeczywistego, którego $(\nabla\varphi)^2$ jest kwadratem natężenia.

**) Warunek ten, związany zresztą jaknajściślej z powyżej obraną, i najwięcej utartą, drogą rozumowania za pomocą potencyału, wymaga

tualnie przez nieciągłości czyli skoki co do kierunku i natężenia, które jednak są równoważne pewnym rozmieszczeniom *curl* **R** i *div* **R**; p. wyżej).

Zobaczymy niebawem (jak to już zaznaczyłem kilkakrotnie w nawiasach), że nieciągłości wektora **R** są równoważne pewnym warstwom wirów i rozbieżności, tak iż mając dane *curl* $\mathbf{R} = \omega$ i *div* $\mathbf{R} = \rho$, mamy już *eo ipso* dane wszelkie nieciągłości pola, dzięki czemu wolno nam było powyżej założyć, że wektor $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$ jest wszędzie ciągły.

Jeżeli jednak czytelnik nie chce się zgodzić na ową antycypacyę równoważności skoków wektora **R** i jego wirów i rozbieżności, natenczas może sformułować zadanie w sposób następujący:

Dane są *curl* $\mathbf{R} = \omega$, *div* $\mathbf{R} = \rho$ i oprócz tego wszelkie nieciągłości, t. j. wszelkie skoki składowej normalnej lub składowej stycznej wektora **R** przy przejściu przez pewne powierzchnie S; znaleźć samo pole **R**.

Otóż, chcąc w tym razie powtórzyć powyższy dowód *jednoznaczności* zadania, założymy, że $\mathbf{R}', \mathbf{R}''$ czynią zadość równaniom curl $\mathbf{R}' = \omega$, curl $\mathbf{R}'' = \omega$, div $\mathbf{R}' = \rho$, div $\mathbf{R}'' = \rho$ i *oprócz tego* doznają jednych i tych samych, danych skoków na poszczególnych powierzchniach S; wówczas, kładąc $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$, otrzymamy nietylko *curl* $\mathbf{R}_0 = 0$, *div* $\mathbf{R}_0 = 0$, lecz również $\mathbf{R}_0$ *ciągłe* przy przejściu przez każde S, a więc też wszędzie (albowiem skoki niweczą się przez odjęcie $\mathbf{R}''$ od $\mathbf{R}'$), i będziemy mogli, bez żadnych już dalszych modyfikacyj, powtórzyć dosłownie powyższe wywody.

Zamiast całej (nieskończonej) przestrzeni rozważmy teraz dziedzinę skończoną, *jednospójną* τ, którą ogranicza dana powierzchnia σ. Dzięki temu będziemy mogli uwolnić się od ciemnych poniekąd warunków dotyczących sposobu zachowania się poszukiwanego wektora **R** w nieskończoności (patrz uwagę na str. 60). Ponieważ zresztą powierzchnia σ jest dowolną, przeto rozważanie niniejszego wypadku naprowadzi nas na właściwy sposób zapatrywania się na zagadnienie dotyczące przestrzeni nieskończonej t. j. obszerniejszej od wszelkiej danej dziedziny τ.

Otóż, w obecnym wypadku twierdzę, że pole **R** w dziedzinie skończonej τ jest *jednoznacznie* określone przez dane:

1-o) rozbieżności, wiry i nieciągłości w dziedzinie τ

i 2-o) wartość składowej normalnej $\mathbf{R}_\nu$ na powierzchni σ *).

---

oczywiście pewnych dalszych objaśnień; należałoby bowiem dodać, w porównaniu *z jakiemi* odległościami r ma być bardzo „wielkie“, i od *jakiego punktu początkowego* O, a przynajmniej od punktu *jakiej dziedziny* ma być mierzone r, przy danych wirach i rozbieżnościach. Dla tego też wrócimy jeszcze do tego przedmiotu.

*) A mianowicie na stronie *wewnętrznej* tej powierzchni, t. j. zwróconej ku τ; gdybyśmy natomiast dali $\mathbf{R}_\nu$ dla strony zewnętrznej σ, musielibyśmy przepisać również wszelkie skoki $\mathbf{R}_\nu$ przy przejściu przez tę powierzchnię.

Istotnie, gdyby dwa pola $\mathbf{R}'$, $\mathbf{R}''$ czyniły zadość wszystkim tym warunkom, mielibyśmy w $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$ pole ciągłe, pozbawione wirów i rozbieżności w całej dziedzinie τ, a więc $\mathbf{R}_0 = -\nabla\varphi$, $\nabla^2\varphi = 0$ i, jak wyżej [(123)]: $\int (\nabla\varphi)^2 d\tau = \int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\sigma$, t. j.

$$\int \mathbf{R}_0^2 d\tau = -\int \varphi . \mathbf{R}_0 \nu . d\sigma;$$

lecz skoro $\mathbf{R}'\nu$, $\mathbf{R}''\nu$ mają posiadać w każdym punkcie σ jedne i też same wartości, mamy

$$\mathbf{R}_0\nu = (\mathbf{R}' - \mathbf{R}'')\,\nu = \mathbf{R}'\nu - \mathbf{R}''\nu = 0,$$

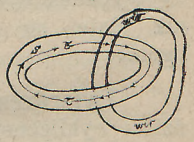
a więc $\int R_0^2 d\tau = 0$, tak iż $\mathbf{R}_0 = 0$, t. j. $\mathbf{R}' = \mathbf{R}''$ w całej dziedzinie τ, q. e. d.

Możemy też dowieść tego w sposób bardziej poglądowy, nie uciekając się ani do twierdzenia Greena ani do potencyału φ. Istotnie, ponieważ pole $\mathbf{R}_0$ jest ciągłe i czysto solenoidalne (t. j. div $\mathbf{R}_0 = 0$), przeto żadna rurka tego pola nie może mieć ani początku ani końca w dziedzinie τ; rurki te mogłyby więc tylko być zamkniętemi w τ pierścieniami, albo też przeszywać powierzchnię σ; ponieważ jednak $\mathbf{R}_0$ nie posiada wirów w τ, t. j. *curl* $\mathbf{R}_0 = 0$, przeto (według twierdzenia Stokes'a) żadna z jego rurek nie może być zamkniętym pierścieniem; ponieważ zaś w każdym punkcie σ jest $\mathbf{R}_0\nu = 0$, przeto żadna z tych rurek nie może też przeszywać tej powierzchni, ani też zaczynać lub kończyć się na niej; musi więc być w całej dziedzinie τ: $\mathbf{R}_0 = 0$, t. j. $\mathbf{R}' = \mathbf{R}''$, jak wyżej.

Zauważmy, że gdybyśmy przepisali *tylko dane* 1-o), t. j. *curl* $\mathbf{R}$, *div* $\mathbf{R}$ i nieciągłości $\mathbf{R}$ wewnątrz τ, rurki pola $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$ *mogłyby* przeszywać σ, tak iż byłoby w ogóle $\mathbf{R}_0$ różne od zera, t. j. $\mathbf{R}'$ różne od $\mathbf{R}''$, czyli: pole *nie* jest określone przez same dane 1-o). Z powyższego sposobu rozumowania widzimy też, że 2-o), t. j. przepisanie wartości normalnej $\mathbf{R}\nu$ na powierzchni σ stanowi, dla jednoznacznego określenia zadania *nietylko warunek wystarczający*, obok 1-o), lecz również *niezbędny*. Skoro bowiem rurki $\mathbf{R}_0$ (które już według 1-o) nie mogą być pierścieniami zamkniętemi ani też urywać się wewnątrz τ) mają znikać, t. j. skoro ma być $R_0 = 0$, musimy odebrać im jedyną jeszcze pozostałą możność: przeszywania powierzchni σ, t. j. wymagać $\mathbf{R}_0\nu = 0$, czyli $\mathbf{R}'\nu = \mathbf{R}''\nu$, a więc oprócz 1-o) przepisać wartości składowej normalnej $\mathbf{R}\nu$ na tej powierzchni.

Dotychczas mówiliśmy o dziedzinie jednospójnej, czyli acyklicznej. Niechaj teraz τ będzie dziedziną *cykliczną*, np. *dwu*spójną, jak wnętrze pierścienia; wówczas dane 1-o) i 2-o) nie wystarczają dla jednoznacznego określenia pola $\mathbf{R}$ wewnątrz τ. Istotnie, jeżeli

i tym razem utworzymy pole $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$ (gdzie $\mathbf{R}', \mathbf{R}''$ czynią zadość warunkom 1-o i 2-o), natenczas rurki $\mathbf{R}_0$ nie mogą wprawdzie ani zaczynać się ani kończyć wewnątrz τ, ani też przeszywać powierzchni σ tej dziedziny, lecz *mogą* natomiast tworzyć pierścienie zamknięte w tej dziedzinie, niedające się zredukować do punktu (porówn. str. 35); $\mathbf{R}_0$ bowiem nie posiada wprawdzie wirów *wewnątrz* τ, lecz dziedzina ta, cykliczna, może oplatać jeden lub więcej wirów przebiegających nazewnątrz τ; wówczas zaś całka liniowa $\int \mathbf{R}_0 d\mathbf{s}$ wzięta wzdłuż takiej rurki lub linii s pola $\mathbf{R}_0$ (Fig. 24) może w zupełnej zgodzie z twierdzeniem Stokesa być różną od zera i będzie mianowicie równą sumie algebraicznej momentów wszystkich wirów splecionych z dziedziną τ. Wektor $\mathbf{R}_0$ będzie więc różny od zera, t. j. $\mathbf{R}'$ różne od $\mathbf{R}''$, tak iż same warunki 1-o) i 2-o) *nie wystarczą* do określenia pola $\mathbf{R}$. Toż samo oczywiście zachodzi dla dziedziny τ o spójności potrójnej, poczwórnej i t. d., w ogóle dla dziedziny *policyklicznej*.



(Fig. 24).

Ponieważ mamy znowu *curl* $\mathbf{R}_0 = 0$ wewnątrz tej dziedziny τ, przeto $\mathbf{R}_0$ posiada w niej potencyał: $\mathbf{R}_0 = -\nabla\varphi$, lecz potencyał ten będzie *wielowartościową* funkcyą położenia w τ; patrz Twierdz. VIII. Jeżeli dziedzina ta jest $(n+1)$ — spójną, czyli posiada n cyklów niezależnych, natenczas pole $\mathbf{R}_0$ będzie w niej miało n różnych klas nie dających się wzajemnie zredukować linij zamkniętych o odpowiednich wartościach całek liniowych $I_{10}, I_{20}, \ldots I_{n0}$, w ogóle różnych od zera.

Możemy jednak natychmiast powiedzieć, jakie są w tym wypadku, oprócz 1-o) i 2-o), niezbędne i wystarczające dane dla określenia pola $\mathbf{R}$. Oto, jeżeli chcemy, aby żadna linia (a więc też rurka) pola $\mathbf{R}_0$ nie mogła być linią zamkniętą w τ [wiemy już zaś, że tylko *ta* ewentualność liniom tym pozostaje, wobec warunków 1-o) i 2-o)], musimy wymagać, aby całki liniowe $I_{10} = \int_{(s_1)} \mathbf{R}_0 d\mathbf{s}$, i t. d. $I_{n0} = \int_{(s_n)} \mathbf{R}_0 d\mathbf{s}$ wektora $\mathbf{R}_0$ znikały wszystkie jednocześnie, t. j. aby całki te były odpowiednio równe dla wektorów $\mathbf{R}'$ i $\mathbf{R}''$:

$$I_1' = \int_{(s_1)} \mathbf{R}' d\mathbf{s} = I_1'' = \int_{(s_2)} \mathbf{R}'' d\mathbf{s}, \text{ i t. d. } I_n' = I_n''$$

dla wszystkich cyklów niezależnych s_1, ... s_n, a więc musimy wymagać, aby oprócz 1-o) i 2-o) dane były wartości całek $I_1 = \int_{(s_1)} \mathbf{R}ds$, ... $I_n = \int_{(s_n)} \mathbf{R}ds$ dla poszukiwanego wektora **R**, dla wszystkich (n) cyklów niezależnych dziedziny τ.

Ponieważ dziedzinę acykliczną możemy uważać jako szczególny wypadek cyklicznej, o wartości $n = 0$, przeto ostatni nasz wynik daje się wraz z poprzednim ująć w jedno twierdzenie ogólne:

Twierdzenie IX. Dla *jednoznacznego określenia* pola **R** w dziedzinie cyklicznej τ ograniczonej powierzchnią (lub kilkoma powierzchniami) σ *niezbędne są i wystarczające* następujące dane:

a) nieciągłości czyli skoki wektora **R**
b) jego wiry, t. j. *curl* $\mathbf{R} = \omega$
c) jego rozbieżności, t. j. *div* $\mathbf{R} = \rho$
} dla całej dziedziny τ,

d) wartość składowej normalnej $\mathbf{R}_\nu$ dla wszystkich punktów powierzchni σ,

e) wartości całek liniowych $I_1 = \int_{(s_1)} \mathbf{R}ds$, I_2 ... I_n, dla wszystkich cyklów niezależnych dziedziny τ.

Wszystkie te dane są więc wybitnie charakterystyczne dla każdego pola wektorowego, zupełnie niezależnie, oczywiście, od znaczenia fizycznego wektora **R**.

Zdobywszy twierdzenie to (IX) nie wyczerpaliśmy jednak jeszcze tematu rozważanego zadania.

Dotychczas bowiem wiemy tylko, że dane a) — e) *nie dopuszczają dwóch różnych rozwiązań*, t. j. że nie mogą istnieć dwie różne całki równań różniczkowych b), c), przy danych dodatkowych a), d), e). Stąd jednak bynajmniej nie wynika, że wszystkim tym danym a)—e) można zawsze uczynić zadość, t. j. że *istnieje* zawsze rozwiązanie tego zadania, czyli że istnieje pole **R** posiadające jednocześnie wszystkie owe dowolnie przepisane właściwości: skoki, wiry, rozbieżności, dane składowe normalne na powierzchni i wymagane wartości I_1, I_2, ... I_n.

Otóż, najlepszym, a może nawet jedynym zadawalniającym dowodem istnienia jakiejś funkcyi, w naszym wypadku funkcyi wektorowej **R**, jest *zbudowanie tej funkcyi* z danych

elementów zadania (i ewentualne sprawdzenie dodatkowe, że czyni ona istotnie zadość wszystkim warunkom zadania).

Opierając się więc na danych a) — e) postaramy się teraz zbudować pole $\mathbf{R}$, zaznaczając mimochodem, że procedura ta posiada doniosłe znaczenie zarówno w elektromagnetyzmie jak też np. w hydrokinematyce.

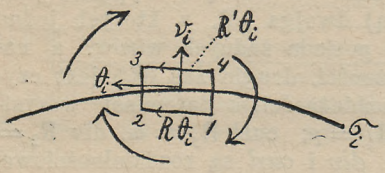
Zadanie to możemy rozłożyć na dwa prostsze, niezależne od siebie. Pole $\mathbf{R}$ możemy bowiem uważać w każdym wypadku jako superpozycyę czyli sumę (wektorową) dwojga pól, z których jedno ($\mathbf{R}_1$) jest czyste irotacyjne, t. j. nie posiada żadnych wirów, a natomiast wszystkie przepisane rozbieżności, drugie zaś ($\mathbf{R}_2$) jest czysto solenoidalne, t. j. nie posiada rozbieżności, a natomiast wszystkie żądane wiry: *curl* $\mathbf{R}_1 = 0$, *div* $\mathbf{R}_1 = \rho$; curl $\mathbf{R}_2 = \omega$, div $\mathbf{R}_2 = 0$. Istotnie, ponieważ operacye *div* i *curl* są rozdzielnościowe, otrzymamy dla $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$: *curl* $\mathbf{R} = curl\ \mathbf{R}_1 + curl\ \mathbf{R}_2 = \omega$, *div* $\mathbf{R} = div\ \mathbf{R}_1 + div\ \mathbf{R}_2 = \rho$, t. j. warunki b) i c) będą spełnione. Co do warunku d), możemy go spełnić, żądając np, aby było na powierzchni σ: $\mathbf{R}_1\nu = \mathbf{R}\nu$ (t. j. = całej danej składowej normalnej), zaś $\mathbf{R}_2\nu = 0$, t. j. aby linie pola $\mathbf{R}_2$ były wszędzie styczne do σ. Podobnie też możemy postąpić z warunkiem e); nie zatrzymuję się na tym punkcie, albowiem, ilekroć uwzględnimy też *wiry* jako część samego pola, będziemy zawsze rozważali dziedzinę τ acykliczną, a mianowicie całą przestrzeń nieograniczoną.

Co się wreszcie tyczy warunku a), to możemy go wcielić po części do b), poczęści do c), albowiem — jak już wspomniałem kilkakrotnie — skoki wektora $\mathbf{R}$ są równoważne pewnym powierzchniowym rozmieszczeniom wirów i rozbieżności.

Istotnie, niechaj σ_i będzie jedną z powierzchni nieciągłości $\mathbf{R}$ w dziedzinie τ, zaś ν_i wektorem jednostkowym normalnym do σ_i, w danym punkcie jakimkolwiek. Skok wektora $\mathbf{R}$, powiedzmy $\mathbf{R}' - \mathbf{R}$, możemy rozłożyć na skok składowej normalnej $(\mathbf{R}\nu_i)' - \mathbf{R}\nu_i = (\mathbf{R}' - \mathbf{R})\nu_i$, i na skok składowej stycznej do σ_i, powiedzmy $(\mathbf{R}' - \mathbf{R})\Theta_i$, gdzie Θ_i jest wektorem jednostkowym stycznym do σ_i określonym (z pośród ∞ kierunków stycznych) przez szczególny charakter danego skoku $\mathbf{R}$. Otóż, co do skoku składowej normalnej, widzimy już z dawniejszego wzoru (67), że skok ten jest równoważny rozmieszczeniu powierzchniowemu rozbieżności, takiemu mianowicie, iż na jednostkę powierzchni σ_i przypada ilość $(\mathbf{R}' - \mathbf{R})\nu_i$, czyli — jak się mówi — rozmieszczeniu o *gęstości powierzchniowej* $(\mathbf{R}' - \mathbf{R})\nu_i$. Zgodnie z tem położymy cały skok składowej normalnej na karb wektora $\mathbf{R}_1$, t. j. $(\mathbf{R}_1' - \mathbf{R}_1)\nu_i = (\mathbf{R}' - \mathbf{R})\nu_i$ = wielkości przepisanej dla każdego punktu σ_i, zaś $(\mathbf{R}_2' - \mathbf{R}_2)\nu_i = 0$, t. j. założymy, że składowa normalna wektora $\mathbf{R}_2$ pozostaje ciągłą. Co się zaś tyczy skoku składowej stycznej, to otrzymamy poszukiwaną równoważność, rozważając w płaszczyznie ν_i, Θ_i (Fig. 25) mały prostokąt 1234 wydłużony w kierunku Θ_i, o bokach 14,23

równoległych do ν_i, i 12,43 równoległych do Θ_i a położonych po jednej i drugiej stronie powierzchni σ_i.

Całka liniowa wektora **R**: $I_{12341} = \int \mathbf{R} ds$, rosciągnięta na obwód naszego prostokąta w kierunku liczb porządkowych, równa się, według twierdzenia Stokes'a, momentowi wiru przeszywającego powierzchnię tego prostokąta. Lecz całka ta w granicy, t. j. przy ustawicznem zmniejszaniu boków 14,23 (które zresztą wciąż mają być znikomo małe w porównaniu z 12,34) i przy jednoczesnem zmniejszaniu 12 i 34, daje



(Fig. 25).

$$(\mathbf{R}\Theta_i - \mathbf{R}'\Theta_i)dl \text{ czyli } (\mathbf{R} - \mathbf{R}')\Theta_i.dl,$$

gdzie *dl* jest elementem długości (skalar) mierzonym w kierunku stycznej Θ_i. Lecz wyraz ten jest identyczny z rozważanym skokiem pomnożonym przez długość *dl*.

Widzimy więc, że skok składowej stycznej jest równoważny warstwie wirowej rospostartej na powierzchni nieciągłości (σ_i), a *moment tego wiru obliczony* na *jednostkę szerokości* (mierzoną w kierunku Θ_i) równa się

$$\lambda_i = (\mathbf{R} - \mathbf{R}')\Theta_i, \tag{126}$$

t. j. *samemu skokowi składowej stycznej*.

Kierunek wiru, w danym punkcie, jest dany przez $V\Theta_i\nu_i$, t. j. przeszywa płaszczyznę Fig. 25 normalnie z góry na dół i jest styczny do powierzchni σ_i. Linie wirowe biegną na tej powierzchni przecinając *normalnie* cały szereg krzywych utworzonych z elementów $d\Theta_i$.

Skok składowej stycznej nie przyczynia się oczywiście zgoła do rozbieżności **R**; możemy go więc położyć całkowicie na karb pola $\mathbf{R}_2$, t. j. napisać $(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_2')\Theta_i = \lambda_i$, $(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_1')\Theta_i = 0$. Wówczas, wobec tego, co uczyniliśmy już wyżej ze składową normalną, warunek a) wszędzie będzie spełniony przez $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$.

Zresztą, wobec tego, cośmy w tej chwili okazali, możemy wcielić skoki składowej stycznej do b), t. j. do wirów danych, zaś skoki składowej normalnej do c), t. j. do rozbieżności danych.

Ponieważ tedy wszelkie pole wektorowe można uważać jako superpozycyę pól niezależnych od siebie: jednego — czysto irotacyjnego, drugiego — czysto solenoidalnego, przeto zajmiemy się każdem z nich z osobna.

Zacznijmy od pierwszego, *irotacyjnego*.

Dotyczące zadanie rozwiążemy w całej ogólności, t. j. dla dziedziny policyklicznej τ, ograniczonej dowolną powierzchnią σ (podczas gdy dla pola solenoidalnego rozważymy jedynie całą przestrzeń nieskończoną, czyniąc pewne założenia co do zachowania się wektora w „nieskończoności").

Niechaj tedy będzie:

(a) curl $\mathbf{R} = 0$ w całej dziedzinie τ

(a′) składowa styczna ciągła „ „ „

(b) div $\mathbf{R} = \rho$, dane dla całej dziedziny τ

(b′) skok składowej normalnej $(\mathbf{R}' - \mathbf{R})\nu_i = \eta_i$ dany dla każdej powierzchni nieciągłości σ_i

(c) składowa normalna $\mathbf{R}\nu$ dana dla całej powierzchni σ,

(d) $I_1, I_2, \ldots I_n$ dane wartości $\int \mathbf{R}ds$ dla wszystkich (n) cyklów niezależnych dziedziny τ.

Opierając się na tych danych, mamy zbudować pole $\mathbf{R}$ w całej dziedzinie τ.

Ze względu na (a), (a′) mamy przedewszystkiem

$$\mathbf{R} = -\nabla\varphi, \text{ dla całej dziedziny } \tau, \tag{127}$$

gdzie φ jest funkcyą wielowartościową położenia w τ, czyniącą zadość, według (b), równaniu div $\nabla\varphi = -\rho$, t. j.

$$\nabla^2\varphi = -\rho, \tag{128}$$

powszechnie znanemu pod nazwą równania *Laplace'a-Poissona*. O pomocniczej tej funkcyi, potencyale wektora $\mathbf{R}$, możemy założyć, że jest skończoną i ciągłą w całej dziedzinie cyklicznej τ. Pochodne jej będą jednak nieciągłe, a mianowicie otrzymamy według (b′) dla powierzchni σ_i (liczba takich powierzchni σ_1, σ_2 i t. d. może być dowolną):

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_i}\right)' - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_i} = -\eta_i. \tag{129}$$

Na powierzchni σ ma być, według (c) i (127):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = -\mathbf{R}\nu = \text{danej funkcyi położenia na } \sigma. \tag{130}$$

Warunek (d) wreszcie jest w najściślejszym związku z *wielowartościowością* potencyału φ w *dziedzinie pierwotnej* τ, t. j. cyklicznej, o spójności $(n+1)$ — krotnej.

Warunkowi temu możemy uczynić zadość zupełnie (t. j. nietylko jakościowo, lecz też ilościowo), wprowadzając znane już nam diafragmy czyli przegrody, a mianowicie n przegród, powiedzmy $a_1, a_2, \ldots a_n$, czyli: a_i, $i = 1, 2, \ldots n$; wówczas

dziedzina nasza stanie się *acykliczną*, potencyał jednak φ nie będzie już w niej funkcyą ciągłą, lecz przy przejściu przez przegrody $a_1, a_2, \ldots a_n$ będzie czynił *skoki*

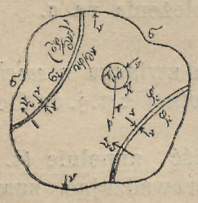
$$(131) \qquad \varphi_1' - \varphi_1 = l_1,\ \varphi_2' - \varphi_2 = l_2,\ \ldots\ \varphi_n' - \varphi_n = l_n,$$

liczebnie dane dla każdej przegrody.

Mamy teraz wyznaczyć funkcyę jednowartościową φ (w dziedzinie acyklicznej) tak aby stało się zadość warunkom (128), (129), (130), (131), czyli — innemi słowy — znaleźć całkę równania Laplace'a-Poissona (128) czyniącą zadość trzem pozostałym warunkom natury powierzchniowej.

W tym celu posłużymy się metodą powszechnie używaną, a opierającą się na zastosowaniu twierdzenia Greena, a mianowicie w postaci wzoru (122).

Niechaj O będzie dowolnym punktem naszej dziedziny acyklicznej, dla którego mamy znaleść wartość φ; nazwijmy ją φ_0. Niechaj p będzie dowolnym punktem tejże dziedziny, zaś odległość p od O oznaczmy przez r. We wzorze (122) połóżmy $\varphi =$ naszemu potencyałowi φ, zaś $\psi = \frac{1}{r}$. Aby jednak zastosować wzór ten musimy wykluczyć z przestrzennej dziedziny całkowania miejsca, w których funkcye te lub ich pochodne są nieciągłe lub też stają się nieskończenie wielkie. Otóż, co się tyczy funkcyi φ, mamy tylko wykluczyć przegrody a_i i powierzchnie σ_i, a więc (w granicy) rozciągnąć całkę powierzchniową w (122) nietylko do σ lecz również do jednej i drugiej strony każdej powierzchni a_i i każdej σ_i; poza tem bowiem φ i pochodne φ są — według założenia — ciągłe i skończone. Co się zaś tyczy funkcyi $\psi = \frac{1}{r}$, to jest ona wszędzie ciągła i skończona wraz ze swojemi pochodnemi, z wyjątkiem jedynego punktu O, t. j. $r = 0$, w którym staje się ona ∞ I-ego rzędu, pierwsze jej pochodne ∞ II-go rzędu, [zaś $\nabla^2(\frac{1}{r})$, jak zobaczymy niebawem, staje się w punkcie O nieokreślone: $\nabla^2(\frac{1}{r}) = \infty - \infty$]. Musimy więc też wykluczyć punkt O, a uczynimy to za pomocą powierzchni kuli K zatoczonej naokoło O, o promieniu r_1, któremu pozwolimy maleć bezgranicznie; zewnętrzną powierzchnię tej kuli będziemy więc również uważali jako część układu powierzchni ograniczających dziedzinę przestrzenną całkowania (Fig. 26).



(Fig. 26).

Oznaczając więc całkę

$$\int\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)d\sigma,\ \psi = \frac{1}{r}$$

przez F_K, $F\sigma_i$, Fa_i, $F\sigma$, o ile mamy ją wziąć dla powierzchni kuli K, względnie dla obydwóch stron σ_i, lub a_i, lub wreszcie dla σ, i przechodząc do granicy (dla $r_1 = 0$), otrzymamy:

$$(132)\quad \int (\varphi \nabla^2(\tfrac{1}{r}) - \frac{1}{r}\nabla^2\varphi)\,d\tau = F\sigma + \sum F\sigma_i + \sum Fa_i + \operatorname*{Lim}_{r_1 = 0} F_K.$$

Lecz $$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x},\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

a więc $$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5},$$

i podobnie $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{y^2}{r^5}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{z^2}{r^5}$

a więc $$\nabla^2(\frac{1}{r}) = -\frac{3}{r^3} + 3\frac{r^2}{r^5} = 3(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3}),$$

t. j. nazewnątrz punktu O, który wykluczyliśmy:

$$(133)\quad \nabla^2(\frac{1}{r}) = 0.$$

Jak zaznaczyłem wyżej, mielibyśmy dla samego punktu O:

$$\nabla^2(\frac{1}{r}) = \infty^3 - \infty^3 \text{ t. j. nieokreślone},$$

Według (128) i (133) otrzymamy zamiast (132):

$$(132a)\quad \int \frac{\rho}{r}\,d\tau = F\sigma + \sum F\sigma_i + \sum Fa_i + \operatorname*{Lim}_{r_1 = 0} F_K,$$

gdzie sumy Σ obejmują wszystkie powierzchnie nieciągłości σ_i względnie wszystkie przegrody a_i, a mianowicie obiedwie ich strony.

Całkę $F\sigma$ pozostawimy w pierwotnym kształcie. Aby otrzymać $F\sigma_i$, zważmy, że przy przejściu przez σ_i funkcya φ nie doznaje skoku, lecz tylko jej pochodna $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$; ponieważ zaś $\psi = \frac{1}{r}$ jest wszędzie ciągłe, mamy:

$$F\sigma_i = -\left[\int \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma_i + \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)' d\sigma_i\right],$$

gdzie normalna ν jest zwrócona zawsze *ku* tej stronie powierzchni, o którą chodzi (porówn. Fig. 25), tak iż posiada ona po jednej stronie kierunek wprost przeciwny niż po drugiej; oznaczając tedy przez ν_i normalną biegnącą od tej strony, gdzie panuje wartość $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$, do tej, gdzie mamy $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)'$, możemy napisać

$$F\sigma_i = \int \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_i}\right)' - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_i}\right] d\sigma_i, \text{ t. j. według (129):}$$

$$(A) \qquad F\sigma_i = -\int \frac{\eta_i d\sigma_i}{r}.$$

Zupełnie podobnie znajdziemy dla Fa_i, pomnąc, że tu $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ czyli $-R\nu$ jest wielkością ciągłą, zaś φ doznaje skoku I_i:

$$(B) \qquad Fa_i = (\varphi_i - \varphi_i')\frac{\partial}{\partial\nu_i}\left(\frac{1}{r}\right) da_i = -I_i \int \frac{\partial}{\partial\nu_i}\left(\frac{1}{r}\right) da_i,$$

gdzie ν_i jest normalną do a_i biegnącą *od* strony, gdzie panuje wartość φ_i, do tej, gdzie panuje φ_i'.

Aby wreszcie otrzymać F_K, weźmy jako element powierzchni kuli K:

$$d\varepsilon \,.\, r_1^2,$$

gdzie $d\varepsilon$ jest elementarnym kątem bryłowym o wierzchołku O; wówczas będzie:

$$F_K = r_1^2 \,.\, \int\left[\varphi \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right]_K d\varepsilon;$$

lecz dla kuli K mamy: $\frac{\partial}{\partial\nu} = -\frac{\partial}{\partial r}$, a więc:

$$F_K = r_1^2 \int \varphi_K \frac{1}{r_1^2} d\varepsilon + r_1 \int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_K d\varepsilon$$

$$= \int \varphi_K \, d\varepsilon + r_1 \,.\, \int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_K d\varepsilon;$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ zachowuje wartość skończoną; drugi wyraz znika więc w granicy, t. j. dla $r_1 = o$; pozostaje więc tylko pierwszy, w którym φ_K dla $r_1 = o$ staje się równe φ_0, t. j, wartości φ w punkcie O,

o którą właśnie nam chodzi. Mamy przeto $\operatorname{Lim}_{r_1 = 0} F_K = \varphi_0 \int d\varepsilon$, t. j.:

$$\text{(C)} \qquad \operatorname{Lim}_{r_1 = 0} F_K = 4\pi\varphi_0.$$

Podstawiając (A), (B), (C) do (132a) mamy żądane rozwiązanie w postaci następującej sumy wyrazów:

$$\text{(134)} \qquad 4\pi\varphi_0 = \int \frac{\rho d\tau}{r} + \sum \int \frac{\eta_i d\sigma_i}{r} +$$

$$+ \sum I_i \int \frac{\partial}{\partial \nu_i} \left(\frac{1}{r}\right) da_i + \int \left[\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\sigma.$$

Otrzymawszy tym sposobem potencyał φ dla każdego punktu (O) dziedziny τ, mamy w $\mathbf{R} = -\nabla\varphi$ poszukiwane pole. Według Twierdz. IX wszelkie inne rozwiązanie może różnić się od (134) li tylko formalnie, w istocie zaś musi być z niem identyczne. To zaś jedyne rozwiązanie *istnieje*, o ile oczywiście przepisane gęstości $\rho = div\,\mathbf{R}$ i t. d. posiadają takie w ogóle rozmieszczenie, iż wyrazy $\frac{\rho d\tau}{r}$ i t. d. są całkowalne, t. j. że sumy $\sum \frac{\rho \Delta\tau}{r}$ i t. d. dążą przy zmniejszaniu elementów $\Delta\tau$ i t. d., do pewnej określonej granicy $\int \frac{\rho d\tau}{r}$ i t. d.

W wypadku *przestrzeni nieskończonej* powyższy wzór upraszcza się znakomicie; w założeniu, że siedliska rozbieżności (ρ, względnie η) nie przekraczają pewnej dającej się wyznaczyć granicy i że potencyał φ maleje, w odległościach bardzo wielkich od tych siedlisk, jak $\frac{1}{r}$, czyli natężenie wektora $-\nabla\varphi = \mathbf{R}$ jak $\frac{1}{r^2}$, ostatnia całka w (134) znika. Istotnie, uważając σ jako powierzchnię kuli o promieniu r_1 rosnącym bezgranicznie, otrzymamy

$$\operatorname{Lim}_{r_1 = \infty} \int \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma = \operatorname{Lim} \frac{C.r_1^2}{r_1^3} = \operatorname{Lim} \frac{C}{r_1} = 0$$

i

$$\operatorname{Lim}_{r_1 = \infty} \int \varphi \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \operatorname{Lim} \frac{C' r_1^2}{r_1^3} = \operatorname{Lim} \frac{C'}{r_1} = 0$$

(gdzie przez C, C′ oznaczyłem wielkości stałe *skończone*).

Mamy więc dla przestrzeni nieskończonej (opuszczając zresztą wskaźnik 0 przy φ):

$$(135) \qquad 4\pi\varphi = \int \frac{\rho d\tau}{r} + \sum \int \frac{\eta_i d\sigma_i}{r} + \sum I_i \int \frac{\partial}{\partial \nu_i} \left(\frac{1}{r}\right) da_i$$

czyli

$$(135a) \qquad 4\pi\varphi = \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{R}.d\tau}{r} + \sum \int \frac{(\mathbf{R}'-\mathbf{R})\nu_i}{r} d\sigma_i +$$

$$+ \sum I_i \int \frac{\partial}{\partial \nu_i} \left(\frac{1}{r}\right) da_i; \quad \mathbf{R} = -\nabla\varphi.$$

Wzór ten (niezależnie zresztą od znaczenia fizycznego wyrazów) możemy interpretować w sposób godny uwagi, powiadając mianowicie, że każda „cząstka“ czyli elementarna ilość rozbieżności $de = \rho d\tau$, względnie $de = \eta_i d\sigma_i$, rozmieszczona bądź to w przestrzeni, bądź to na powierzchni nieciągłości, daje w odległości r potencyał (elementarny)

$$(136) \qquad \frac{1}{4\pi} \frac{de}{r},$$

a więc odpowiedni wektor (elementarny) $\mathbf{R}$:

$$(137) \qquad -\frac{1}{4\pi} de.\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{de}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{de}{r^2} \cdot \mathbf{r}$$

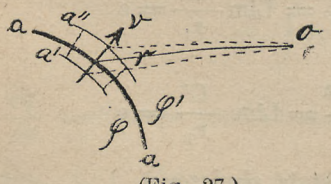
(gdzie $\mathbf{r}$ jest wektorem jednostkowym wskazującym od de do rozważanego punktu), a więc pole o liniach prostych radyalnych, wybiegających lub zbiegających się w de zależnie od tego czy $de > 0$, czy też $de < 0$, i o natężeniu *odwrotnie proporcyonalnem do kwadratu odległości.*

Podobnie też dają się interpretować elementy ostatniego wyrazu we wzorze (135), t. j.

$$(138) \qquad \frac{1}{4\pi} I. \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r}\right) . da,$$

(gdzie dla uproszczenia pisowni opuściłem wskaźniki i); odpowiadają one mianowicie rozmieszczeniu rozbieżności w tak zwanych *warstwach podwójnych.*

Istotnie, wyobraźmy sobie dwa elementy powierzchni da', da'' równoległe do da, po jednej i drugiej stronie da (Fig. 27); normalna odległość tych elementów od da niechaj będzie (w kierunku ν) $+\frac{1}{2}h$, względnie $-\frac{1}{2}h$, t. j. wzajemna ich odległość $= h$. Niechaj da' będzie siedliskiem rózbieżności o gęstości powierzchniowej η, zaś da'' niechaj posiada rozmieszczenie o gęstości—η. Oznaczmy przez r odle-



(Fig. 27.)

głość elementu da od dowolnego punktu O; natenczas potencyał φ w punkcie O, odpowiadający tej parze elementów da', da'' będzie

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\left\{\eta\, da''.\left(\frac{1}{r} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{r}\right].h + [h^2]\right)\right.$$

$$\left. - \eta\, da'\left(\frac{1}{r} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{r}\right]h + [h^2]\right)\right\},$$

gdzie $[h^2]$ oznacza wyrazy drugiego i wyższych stopni w h. Zmniejszając więc odległość h warstw (zwyczajnych) i zwiększając jednocześnie gęstość η, tak aby iloczyn $h\eta$ dążył do pewnej określonej (i w ogóle skończenie wielkiej) granicy, którą nazwiemy *momentem* warstwy podwójnej, otrzymamy, ze względu na Lim $da' =$ Lim $da'' = da$:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right).\ \text{Lim}\ (\eta h),$$

t. j. wyraz identyczny ze (138), skoro tylko położymy

(139) $\varphi' - \varphi = I = \text{Lim}\ (\eta h) =$ momentowi warstwy podwójnej.

Powierzchnia nieciągłości potencyału φ jest więc równoważna *warstwie podwójnej o momencie równym skokowi potencyału.*

Pamiętajmy zresztą, że ten „skok potencyału“ nie jest niczem innem jak całką liniową odpowiedniego wektora $\mathbf{R} = -\nabla\varphi$ wziętą wzdłuż linii prowadzącej (nazewnątrz powierzchni nieciągłości) od dowolnego punktu położonego na jednej stronie do odpowiedniego punktu na drugiej stronie tej powierzchni. Pierwotnie też wprowadziliśmy wielkości I (t. j. I_1, I_2 i t. d.) li tylko ze względu na cykliczność rozważanej dziedziny τ, a następnie dopiero rozważaliśmy je jako skoki φ przy przejściu przez pewne, sztuczne przegrody, przekształcające tę dziedzinę na acykliczną. Potencyał φ ma jednak dla nas zawsze tylko charakter pomocniczy, podczas gdy główną uwagę zwracamy na samo pole wektorowe $\mathbf{R}$.

Moment $I =$ Lim (ηh) warstwy podwójnej posiada w naszym wypadku jednę i tę samą wartość na całej warstwie a; warstwa taka nazywa się *jednorodną*. Podobnie też moglibyśmy rozważać warstwę niejednorodną, t. j. o momencie, który jest daną funkcyą położenia na takiej powierzchni; taką jednak warstwę możnaby zawsze rozważać jako superpozycyę warstw jednorodnych o różnych momentach; dla tego też nie zatrzymuję się dłużej na tym przedmiocie.

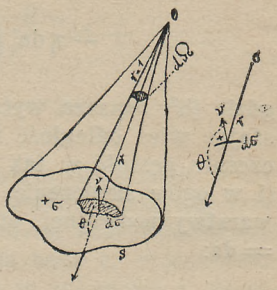
Godną uwagi jest następująca konstrukcya geometryczna potencyału warstwy podwójnej *jednorodnej*.

Niechaj powierzchnia σ ograniczona linią s wyobraża taką

warstwę o momencie m (Fig. 28), tak iż odpowiedni potencyał w punkcie O jest

$$(140) \qquad \varphi = \frac{m}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r}\right) d\sigma;$$

otóż, ponieważ $\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \nu} = +\frac{\cos\Theta}{r^2}$, gdzie Θ jest kątem zawartym między normalną ν a prostą $O,d\sigma$, przeto mamy $\varphi = \frac{m}{4\pi}\int \frac{\cos\Theta}{r^2} d\sigma$; lecz $\frac{\cos\Theta}{r^2} d\sigma = d\Omega$ jest kątem bryłowatym, pod którym widzimy element $d\sigma$ z punktu O, a więc:



(Fig. 28.).

$$(141) \qquad \varphi = m\,\frac{\Omega}{4\pi},$$

gdzie Ω jest *kątem widzenia* całej powierzchni czyli „warstwy podwójnej" σ z punktu O. Potencyał φ jest przeto proporcyonalny do tego kąta widzenia, a więc zależy jedynie tylko od linii s ograniczającej tę warstwę, tak iż możemy warstwę tę bez zmiany φ odkształcać dowolnie, byleby tylko punkt O nie przeszedł z jednej jej strony na drugą.

Jeżeli punkt O zbliża się ustawicznie do jednej, np. dodatniej strony naszej warstwy, natenczas kąt Ω dąży do wartości $+2\pi$; jeżeli natomiast zbliża się bezgranicznie do jej strony ujemnej, kąt Ω dąży do wartości -2π; przy przejściu więc *przez tę warstwę od strony ujemnej do dodatniej* wielkość Ω doznaje skoku 4π, t. j. potencyał φ doznaje, według (141), skoku m $(=\varphi' - \varphi)$, jak być powinno.

Jeżeli warstwa podwójna (zawsze jednorodna) jest *zamkiętą* i punkt O znajduje się wewnątrz niej, natenczas mamy $\Omega = -4\pi$*), t. j. $\varphi = -m = const.$ dla wszystkich punktów wewnętrznych, tak iż $\mathbf{R} = -\nabla\varphi = 0$, t. j. odpowiedni wektor znika w całej przestrzeni wewnętrznej. Dla wszelkich punktów zewnętrznych mamy natomiast $\Omega = 0$, t. j. $\varphi = 0$, a więc również $\mathbf{R} = -\nabla\varphi = 0$, t. j. odpowiednie pole znika również nazewnątrz tej warstwy zamkniętej.

Ten sam wynik otrzymamy też dla nieograniczunej powierz-

*) Skoro strona zewnętrzna jest dodatnią.

chni niezamkniętej, jak np. dla płaszczyzny figurującej jako warstwa podwójna jednorodna; w tym bowiem wypadku mamy dla wszystkich punktów po jednej stronie tej płaszczyzny $\Omega = 2\pi$, t. j. $\varphi = \frac{1}{2} m = \text{const.}$, po drugiej zaś stronie $\Omega = -2\pi$, t. j. $\varphi = -\frac{1}{2} m = \text{const.}$, a więc wszędzie $\mathbf{R} = 0$.

Znaczenie faktyczne może więc dla nas posiadać li tylko warstwa podwójna jednorodna *ograniczona* pewną linią s, a wobec powyższych wyników możemy uważać s jako *linię wirową*, t. j. jako granicę (Limes) bardzo cienkiego włókna czyli rurki wirowej o momencie m liczebnie równym momentowi owej warstwy. Zauważmy też, że do pojęcia warstw podwójnych przyszliśmy właściwie przez rozważanie dziedziny cyklicznej irotacyjnej i że taka dziedzina powstaje w naturalny soosób jedynie tylko gwoli wykluczeniu wirów; to też idealna linia „s“ ograniczająca ową warstwę czyli sztuczną przegrodę przochowuje wiernie ów charakter włókna wirowego.

Rozważywszy pole irotacyjne, przejdźmy teraz do pola czysto *solenoidalnego*, aby zbudować je na podstawie danych *wirów* (podobnie jak tamto zbudowaliśmy na podstawie danych rozbieżności).

Zajmiemy się tym razem atoli najprostszym tylko wypadkiem, w którym mianowicie dziedzina τ obejmuje *całą przestrzeń*.

Niechaj tedy będzie:

(a) $\operatorname{div} \mathbf{R} = 0$ w całej przestrzeni

(a′) składowa normalna ciągła w całej przestrzeni

(b) $\operatorname{curl} \mathbf{R} = \omega$, gdzie ω jest wektorem danym dla całej przestrzeni

(b′) skok składowej stycznej $(\mathbf{R}' - \mathbf{R})\,\Theta_i$ dany dla każdej powierzchni nieciągłości; równoważne jednak warstwy wirowe możemy włączyć do (b);

(c) natężenie R poszukiwanego pola w odległościach r bardzo wielkich od włókien i warstw wirowych niechaj maleje jak $\frac{1}{r^2}$.

Wiemy już, że może istnieć *jedyne* tylko pole $\mathbf{R}$ czyniące zadość wszystkim tym warunkom. Aby je zbudować z powyższych danych, połóżmy przedewszystkiem

$$\mathbf{R} = \operatorname{curl} \mathbf{F} \tag{142}$$

uważając $\mathbf{F}$ jako (poszukiwany) wektor pomocniczy. Ponieważ $\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$ [patrz wzór (70)] i składowa normalna *curl* $\mathbf{F}$ jest wszędzie ciągła, przeto (142) czyni już zadość warunkom (a), (a′), jeśli nawet $\mathbf{F}$ jest wektorem jakimkolwiek.

Według (b), które ma już zawierać w sobie (b′) jako wypadek graniczny, mamy $curl^2 \mathbf{F} = \omega$, t. j. według wzoru (114):

$$\nabla^2 \mathbf{F} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{F} = -\omega.$$

Dodatkowo możemy założyć, że wektor pomocniczy $\mathbf{F}$ jest solenoidalnym, t. j. że jego składowa normalna jest wszędzie ciągła i że

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 0; \tag{143}$$

równanie to sprawdzimy zresztą, po wyrażeniu $\mathbf{F}$ przez dany wektor ω. Według (143) otrzymamy dla $\mathbf{F}$ równanie różniczkowe

$$\nabla^2\mathbf{F} = -\omega, \tag{144}$$

t. j. równanie zupełnie analogicznie do równania Laplace'a-Poissona $\nabla^2\varphi = -\rho$, z tą tylko różnicą, że φ, ρ są skalarami, podczas gdy $\mathbf{F}$, ω są *wektorami*.

Aby uczynić zadość warunkowi (c), założymy według (142) [pamiętając o tem, że *curl* zawiera *jednokrotne* różniczkowania ze względu na spółrzędne], że natężenie F naszego wektora, a więc też np. jego składowe prostokątne F_1, F_2, F_3 maleją w nieskończoności jak $\frac{1}{r}$. Pisząc $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3$, $\omega = \mathbf{i}\omega_1 + \mathbf{j}\omega_2 + \mathbf{k}\omega_3$, możemy rozłożyć równanie wektorowe (144) na trzy skalarne:

$$\nabla^2 F_1 = -\omega_1, \text{ i t. d.} \tag{144a}$$

Poszczególne te równania nie różnią się już w niczem od równania $\nabla^2\varphi = -\rho$; otrzymamy więc, wzorując się na (135), uwzględniając, że składowa normalna $\mathbf{F}$ jest ciągła, i biorąc $\mathbf{F}$, a więc F_1, F_2, F_3 jako funkcye jednowartościowe położenia:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\omega_1}{r}\,d\tau,\quad F_2 = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\omega_2}{r}\,d\tau,\quad F_3 = \int\frac{\omega_3}{r}\,d\tau, \tag{145a}$$

gdzie całki obejmują wszystkie elementy $d\tau$ wirów, zaś r jest odległością $d\tau$ od rozważanego punktu (x, y, z), któremu przysługują wartości F_1, F_2, F_3. Mnożąc trzy te nównania skalarne względnie przez $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ i dodając do siebie, otrzymamy

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\omega}{r}\,d\tau \tag{145}$$

jako rozwiązanie wektorowe równania (144).

Wektor $\mathbf{F}$ jest zbudowany z $\omega = curl\,\mathbf{R}$ zupełnie tak samo jak potencyał (skalarny) φ z rozbieżności, t. j. z $\rho = div\,\mathbf{R}$; z wektora $\mathbf{F}$ wyprowadzamy poszukiwany wektor $\mathbf{R}$ przez operacyę *curl* czyli $V\nabla$ podobnie jak (dla pola irotacyjnego) ze skalara φ przez operacyę $-\nabla$. Ze względu na tę analogię $\mathbf{F}$ nazywa się *potencyałem wektorowym* rozmieszczenia wirów ω. Każdy element całki

(145) wyrażającej ten potencyał jest oczywiście wektorem, a mianowcie o kierunku ω.

Mamy jeszcze dowieść, że otrzymany tym sposobem wektor $\mathbf{F}$ czyni zadość warunkowi dodatkowemu (143), t. j. że div $\mathbf{F} = 0$. Otóż, według (145)

$$4\pi . \operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \int \frac{\omega d\tau}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\omega_1 d\tau}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\omega_2 d\tau}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\omega_3 d\tau}{r};$$

x, y, z są spółrzędnemi punktu O, któremu przysługują wartości F_1, F_2, F_3; oznaczmy przez a, b, c spółrzędne dowolnego elementu wiru $d\tau$, tak iż będzie

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$

Otoż, zamiast przesunąć O o długości dx, względnie dy, dz, możemy punkt ten unieruchomić i przesunąć cały układ wirów jako jednę całość sztywną w kierunku przeciwnym, t. j. zmienić spółrzędne a, b, c każdego elementu $d\tau$ o $-da, -db, -dc$; tym sposobem otrzymamy

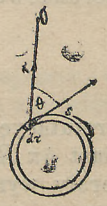
$$-4\pi . \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{\omega_1 d\tau}{r} + \ldots = \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial a} + \frac{\partial \omega_2}{\partial b} + \frac{\partial \omega_3}{\partial c} \right) d\tau +$$

$$\int \frac{1}{r^2} \left(\omega_1 \frac{x - a}{r} + \omega_2 \frac{y - b}{r} + \omega_3 \frac{z - c}{r} \right) d\tau$$

$$= \int \frac{1}{r} \operatorname{div} \omega . d\tau + \int \frac{1}{r^2} \tilde{\omega} \cos \Theta . d\tau,$$

gdzie $\tilde{\omega}$ jest natężeniem wektora ω, zaś Θ jest kątem zawartym między tymże wektorem a prostą prowadzącą *od* $d\tau$ do punktu O (patrz Fig. 29); lecz $\omega = curl\ \mathbf{R}$, a więc $div\ \omega = 0$ identycznie, tak iż

$$(146) \quad -4\pi \operatorname{div} \mathbf{F} = \int \frac{1}{r^2} \tilde{\omega} \cos \Theta . d\tau.$$



(Fig. 29).

Weźmy teraz jako $d\tau$ element włókna wirowego o długości ds i o przekroju $d\sigma$, t. j. położymy $d\tau = ds.d\sigma$; ponieważ $\tilde{\omega}\, d\sigma$, czyli moment wiru posiada jednę i tę samą wartość wzdłuż całego włókna, przeto wartość powyższej całki wzięta dla każdego z osobna elementarnego włókna wirowego będzie

$$\bar{\omega}.d\sigma \int \frac{\cos \Theta}{r^2} ds \text{ czyli } - \bar{\omega}\, d\sigma \int \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right) ds$$

(albowiem $\frac{\partial r}{\partial s} = \cos \Theta$); ponieważ zaś każde włókno wirowe jest *zamkniętym* pierścieniem (lub biegnie obustronnie w nieskończoność), zaś $\frac{1}{r}$ jest jednowartościową funkcyą położenia, przeto powyższa całka znika identycznie dla każdego włókna; znika więc też suma wszystkich tych całek dla całego układu wirów, t. j. mamy według (146) div $\mathbf{F} = 0$, — co było do dowiedzenia.

Mając już potencyał wektorowy $\mathbf{F}$ możemy zeń wyprowadzić łatwo, a mianowicie według (142) za pomocą operacyi *curl*, poszukiwane pole $\mathbf{R}$.

Uciekając się, tymczasowo, do rozwinięcia kartezyuszowskiego, mamy dla pierwszej np. składowej tego wektora, równoległej do osi x-ów:

$$R_1 = \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

t. j. według (145a):

$$4\pi R_1 = \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{1}{r} \omega_3 \, d\tau - \frac{\partial}{\partial z}\int \frac{1}{r} \omega_2 \, d\tau =$$

$$= \int \frac{1}{r^2}\left[\omega_2 \frac{z-c}{r} - \omega_3 \frac{y-b}{r}\right] d\tau,$$

czyli, oznaczając *wektor jednostkowy* wskazujący *od* $d\tau$ ku punktowi O (x, y, z) przez $\mathbf{r}$, składowe zaś tego wektora (czyli jego dostawy kierunkowe) przez r_1, r_2, r_3:

$$4\pi R_1 = \int \frac{1}{r^2}(\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2)\, d\tau;$$

przez permutacyę cykliczną wskaźników 1, 2, 3 otrzymamy stąd natychmiast $4\pi R_2$ i $4\pi R_3$, które zamiast powyższego nawiasu będą zawierały wyrazy $\omega_3 r_1 - \omega_1 r_3$, $\omega_1 r_2 - \omega_2 r_1$; trzy te jednak analogine wyrazy są, według wzoru (8), składowemi wektora $V\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}$, t. j. iloczynu wektorowego ω i $\mathbf{r}$; mamy więc dla wektora wypadkowego $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r^2} V\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}.d\tau, \text{ gdzie } \boldsymbol{\omega} = \text{curl } \mathbf{R}. \tag{147}$$

Możemy przeto powiedzieć, że każdemu elementowi włókna wirowego $d\tau = d\sigma.ds$ o momencie $m = \varkappa d\sigma$ odpowiada pole elementarne

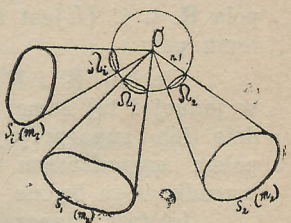
$$\delta \mathbf{R} = \frac{m}{4\pi r^2} V d\mathbf{s} \,.\, \mathbf{r}, \tag{147a}$$

(gdzie $d\mathbf{s}$ jest wektorem o kierunku ω i o długości ds); kierunek wektora $\delta\mathbf{R}$ jest prostopadły do elementu $d\mathbf{s}$ i do prostej łączącej go z rozważanym punktem, natężenie zaś jego jest odwrotnie proporcyonalne do kwadratu odległości od $d\mathbf{s}$ i wprost proporcyonalne do momentu m, do długości ds elementu wirowego i wreszcie do wstawy kąta $d\mathbf{s},\mathbf{r}$.

Rozkład ten jednak na pola elementarne o postaci (147a) jest oczywiście zupełnie sztuczny; albowiem element „$d\mathbf{s}$“ istnieje zawsze tylko jako część *pierścienia* wirowego, t. j. włókna *zamkniętego* lub też — w granicy — biegnącego obustronnie w nieskończoność.

Wzór (147), wyprowadzony z potencyału wektorowego $\mathbf{F}$, jest ważny zarówno nazewnątrz jak i wewnątrz wirów.

Wiemy już zresztą, że *nazewnątrz* wirów, t. j. tam gdzie curl $\mathbf{R} = 0$, wektor $\mathbf{R}$ posiada *potencyał skalarny*, który jest funkcyą *wielo*wartościową położenia w odpowiedniej dziedzinie cyklicznej. Oznaczmy potencyał ten przez ψ, dla odróżnienia od potencyału φ odpowiadającego rozbieżnościom. Kładąc przez każdą rurkę wirową i diafragmę ograniczoną przez dowolny obwód s_i biegnący na powierzchni wiru (byle tylko nie oplatający go) i oznaczając przez Ω_i kąt widzenia takiej diafragmy lub też, co na jedno wychodzi, jej obwodu s_i z rozważanego punktu O (jak na fig. 30), mamy według poprzednich wywodów:



(Fig. 30).

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \sum m_i \, \Omega_i; \quad \mathbf{R} = -\nabla\psi, \tag{148}$$

gdzie m_i jest momentem wiru i i gdzie suma obejmuje wszystkie wiry; wewnątrz włókien wirowych wzór ten traci oczywiście swoje znaczenie.

Na zakończenie Analizy wektorów rozważymy tu niektóre własności pewnej — że tak powiem — funkcyi całego pola wektorowego, która posiada zasadnicze znaczenie w wielu działach fizyki

matematycznej i która zresztą sama też przez się jest godną uwagi.

Mam tu na myśli wartość całki

$$U = \tfrac{1}{2} \int R^2 d\tau \tag{149}$$

rosciągniętej na całe pole wektorowe **R**, lub ewentualnie na pewną jego ograniczoną dziedzinę τ.

Jeżeli **R** jest prędkością ruchu cząstek płynu (o gęstości 1), całka ta wyraża energię kinetyczną masy płynu wypełniającej przestrzeń τ; jeżeli **R** oznacza siłę elektryczną lub magnetyczną (w „próżni"), całka ta daje nam wyraz zasobu energii elektrycznej, względnie magnetycznej, odpowiedniego pola.

Otóż, ze względu na tę jej szczególne znaczenie, pozwolę sobie nazwać powyższą całkę w ogóle *energią pola* **R**, dlatego chociażby, aby mieć dla niej krótką a wygodną w użyciu nazwę; proszę jednak czytelnika, aby w następujących tu wywodach zechciał ją uważać tylko jako taką właśnie krótką nazwę dla wyrazu (149) i aby przy ogólnych naszych wywodach matematycznych zapomniał o synonimie fizycznym tej „energii" i o wszelkich wogóle związanych z nim pojęciach fizycznych.

Ponieważ R^2 (podobnie jak $d\tau$) jest skalarem, przeto energia pola **R**, t. j. U, jest również pewnym *skalarem*, przysługującym całemu polu.

Niechaj $\mathbf{R}'$ i $\mathbf{R}''$ będą dwa pola wektorowe rostaczające się w jednej i tej samej dziedzinie przestrzennej τ, zaś **R** niechaj będzie ich superpozycyą, t. j. $\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \mathbf{R}''$; możemy też nazwać **R** polem *wypadkowem* pól *składowych* $\mathbf{R}'$ i $\mathbf{R}''$. Otóż energia pola wypadkowego będzie wogóle *różną* od sumy energij pól składowych.

Istotnie, oznaczając pierwszą przez U, dwie pozostałe zaś przez U', U'', otrzymamy według określenia (149):

$$U = \tfrac{1}{2} \int (\mathbf{R}' + \mathbf{R}'')^2 \, d\tau = U' + U'' + \int \mathbf{R}'\mathbf{R}''.d\tau,$$

ostatnia zaś całka, którą (z powyższem zastrzeżeniem) możemy nazwać *energią wzajemną* pól $\mathbf{R}'$ i $\mathbf{R}''$, jest *wogóle* różną od zera. Zobaczymy jednak niebawem, że w *pewnych*, godnych uwagi, wypadkach całka ta iloczynu skalarnego wektorów $\mathbf{R}'$, $\mathbf{R}''$ znika, tak iż U staje się wówczas równem $U' + U''$.

Widzieliśmy poprzednio, że każde pole wektorowe daje się rozłożyć na pole czysto *irotacyjne* i na pole czysto *solenoidalne*, i poznaliśmy cechy charakterystyczne każdego z tych gatunków pól. Przy obliczeniu energii dowolnego pola nasuwa się więc myśl rozkładu zadania na dwa inne, jak zobaczymy, prostsze: obliczenie energii z osobna dla pól składowych: irotacyjnego i solenoidalnego;

zachodzi tu bowiem ta sprzyjająca okoliczność, że energia *wzajemna takich* właśnie pól znika zawsze.

Można tego dowieść w sposób poglądowy, t. j. bez żadnego prawie „rachunku".

Istotnie, niechaj $\mathfrak{R}'$ będzie polem irotacyjnem, zas $\mathfrak{R}''$ — solenoidalnem; dziedzina ich spółistnienia niechaj obejmuje całą przestrzeń. Aby otrzymać ich energię wzajemną $\int \mathfrak{R}'\mathfrak{R}'' \, d\tau$, wystarcza zresztą uwzględnić te tylko części przestrzeni, w których ani $\mathfrak{R}'$, ani $\mathfrak{R}''$ nie znika. Cała więc dziedzina całkowania daje się rozłożyć bądź to na rurki pola $\mathfrak{R}'$, bądź też na rurki pola $\mathfrak{R}''$. Posłużymy się drugim z tych roskładów, jako wygodniejszym. Obliczmy więc onergię wzajemną dla jednej z rurek elementarnych pola $\mathfrak{R}''$, wybranej zupełnie dowolnie. Niechaj $d\sigma$ będzie jej przekrojem poprzecznym, a więc $m = R''d\sigma$ jej momentem; ds niechaj będzie elementem długości tej nieskończenie cienkiej rurki, zaś $d\mathfrak{s}$ wektorem o wielkości ds i o kierunku wektora $\mathfrak{R}''$. Biorąc jako element objętości $d\tau = d\sigma.ds$, otrzymamy $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}''.d\tau = \mathfrak{R}'\mathfrak{R}''.d\sigma ds = R''d\sigma$. $\mathfrak{R}'d\mathfrak{s} = m.\mathfrak{R}'d\mathfrak{s}$; ponieważ zaś m, jako moment rurki solenoidalnej, posiada jednę i tę samą wartość wzdłuż całej rurki, przeto odpowiadająca jej energia wzajemna będzie równa

$$m \int \mathfrak{R}'d\mathfrak{s},$$

t. j. proporcyonalna do całki liniowej wektora $\mathfrak{R}'$ wzdłuż całej rurki wektora $\mathfrak{R}''$. Otóż, ponieważ pole $\mathfrak{R}''$ jest solenoidalne, każda z jego rurek jest albo

1-o) zamkniętym w sobie pierścieniem, albo też

2-o) biegnie obustronnie w nieskończoność.

Ponieważ zaś pole $\mathfrak{R}'$ jest irotacyjne (*curl* $\mathfrak{R}' = 0$), przeto w pierwszym wypadku $\int \mathfrak{R}'d\mathfrak{s}$ znika, według twierdzenia Stokesa.

W drugim wypadku mamy

$$m \int \mathfrak{R}'d\mathfrak{s} = m\,(\varphi - \varphi),$$
$$-\infty \quad \infty$$

gdzie φ, φ oznaczają wartości graniczne potencyału wektora $\mathfrak{R}'$
$\infty \quad -\infty$
($\mathfrak{R}' = -\nabla\varphi$), skoro posuwamy się w nieskończoność wzdłuż rozważanej rurki, w jej kierunku dodatnim względnie ujemnym. Skoro więc założymy dodatkowo, że natężenie wektora $\mathfrak{R}'$ maleje w nie-

skończoności jak $\frac{1}{r^2}$, czyli potencyał φ jak $\frac{1}{r}$, natenczas

$\varphi_{-\infty}$, φ_{∞} będą wielkościami nieskończenie małemi I-go rzędu, a więc też ich różnica będzie wielkością tegoż (przynajmniej) rzędu, powiedzmy $\varphi_{-\infty} - \varphi_{\infty} = \varepsilon$; ponieważ zaś moment $m = R''d\sigma$ jest II-go rzędu *), czyli $m = \varepsilon^2$, przeto dla rurki obustronnie nieskończonej jest $m \int \mathbf{R}'d\mathbf{s} = \varepsilon^3$; gdyby więc nawet wszystkie rurki elementarne (t. j. cały rój ∞^2) biegły w nieskończoność, otrzymalibyśmy dla całego pola $\int \mathbf{R}'\mathbf{R}''d\tau = \varepsilon$, t. j. wielkość znikomą I-go rzędu.

Zakładając więc milcząco (raz na zawsze) ów sposób zachowania się pola w nieskończoności, możemy wysłowić otrzymany wynik w następującem twierdzeniu:

Twierdzenie X. *Energia wzajemna pola irotacyjnego* ($\mathbf{R}'$) *i pola solenoidalnego* ($\mathbf{R}''$) *równa się zeru:* $\int \mathbf{R}'\mathbf{R}''d\tau = 0$. Energia dowolnego pola ($\mathbf{R}$) równa się *sumie energij pól składowych: irotacyjnego i solenoidalnego*, na jakie tamto rozłożyć można:

$$U = \tfrac{1}{2}\int R^2 d\tau = \tfrac{1}{2}\int R'^2 d\tau + \tfrac{1}{2}\int R''d\tau = U' + U''.$$

Rozważmy teraz z osobna pole czysto irotacyjne i pole czysto solenoidalne. Zacznijmy od pierwszego.

Niechaj tedy $\mathbf{R}$ będzie polem *irotacyjnem*, obejmującem całą przestrzeń, tak iż mamy wszędzie *curl* $\mathbf{R} = 0$ (i ciągłość składowej stycznej na ewentualnych powierzchniach, na których składowa normalna doznaje skoku), a więc $\mathbf{R} = -\nabla\varphi$, gdzie potencyał φ jest jednowartościową funkcyą położenia. Oznaczmy znowu *div* $\mathbf{R}$ przez ρ i skok składowej normalnej $\mathbf{R}\nu_i$ na pewnych powierzchniach σ_i przez η_i, t. j. połóżmy:

(150) $$\nabla^2\varphi = -\rho$$

---

*) Zakładamy tu oczywiście, że R'' nigdzie nie osiąga wartości nieskończenie wielkich.

(150a) $$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_i}\right)' - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_i} = -\eta_i.$$

Kładąc w twierdzeniu Greena (121) $\psi = \varphi =$ naszemu potencyałowi i rosciągając całkę powierzchniową $\int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\sigma$ nietylko do bezgranicznie rosnącej kuli, lecz również do obydwóch stron każdej powierzchni nieciągłości (σ_i), otrzymamy według (150) i (150a):

$$-\int \varphi\rho d\tau - \sum\int \varphi\eta_i d\sigma_i = -\int (\nabla\varphi)^2 d\tau + \text{Lim}\int \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\sigma.$$

Ponieważ zaś φ maleje jak $\frac{1}{r}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ jak $\frac{1}{r^2}$, przeto granica ostatniej całki po prawej stronie znika; ponieważ, dalej, $-\nabla\varphi = \mathfrak{R}$, przeto mamy dla energii, $U = {}^1/_2 \int R^2 d\tau$, pola *irotacyjnego*:

(151) $$U = {}^1/_2 \int \varphi\rho d\tau + {}^1/_2 \sum\int \varphi\eta_i d\sigma_i.$$

Przypomnijmy sobie, że $\rho d\tau$, względnie $\eta_i d\sigma_i$ jest liczbą rurek *jednostkowych wychodzących* z elementu objętości $d\tau$, względnie powierzchni $d\sigma$ (biorąc rurki *wchodzące*, czyli kończące się w $d\tau$, względnie na $d\sigma$, *ujemnie*). Elementy takie, w których mianowicie ρ lub η są różne od zera, możemy nazwać *źródłami* rurek pola, liczbę zaś rurek jednostkowych wychodzących z danego źródła możemy nazwać *natężeniem źródła*. Oznaczając przez *de* natężenie dowolnego źródła elementarnego, bez względu na to, czy jest ono przestrzennem czy też powierzchniowem, możemy wzór (151) napisać krócej:

(151a) $$U = {}^1/_2 \int \varphi\, de;$$

całka obejmuje tu wszystkie źródła; natężenie *de* każdego z nich może zresztą być bądź to wielkością dodatnią, bądź to ujemną.

Według wzoru (135) możemy jeszczcze napisać dla potencyału φ:

(152) $$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{de'}{r},$$

gdzie de' jest natężeniem dowolnego źródła p', zaś r odległością tegoż źródła p' od punktu, w którym panuje potencyał φ i w którym znajdować się może inne źródło, powiedzmy p, o natężeniu de. Posługując się tym wzorem dla potencyału, możemy więc napisać, zamiast (151a):

$$(152) \qquad U = {}^1/_2 \int\int \frac{de.de'}{4\pi r},$$

gdzie r jest wzajemną odległością źródeł p, p' o natężeniach de, de'. Ze sposobu zbudowania tego wyrazu widzimy, że każdy element de występuje tu *dwa* razy; raz jako de, drugi raz jako de'; każda więc *para* źródeł elementarnych występuje w (152) również *dwa* razy; biorąc ją *raz jeden tylko*, należy opuścić spółczynnik ${}^1/_2$.

Wyniki te możemy wysłowić w sposób następujący:

Twierdzenie XI. Energia dowolnego pola *irotacyjnego* daje się wyrazić przez połowę sumy (czyli całki) *iloczynów z natężeń wszystkich źródeł i odpowiednich potencyałów* lub też przez sumę (czyli całkę, podwójną) *iloczynów z natężeń każdej pary źródeł podzielonych przez wzajemną odległość tych źródeł* (i przez liczbę 4π):

$$U = {}^1/_2 \int R^2 d\tau = {}^1/_2 \int \varphi \, de = \frac{1}{4\pi} \int\int \frac{de.de'}{r}.$$

(W ostatnim wyrazie należy każdą parę źródeł uwzględnić *jeden* raz tylko).

Zauważmy, że energia pola U, określona pierwotnie przez całkę obejmującą *całe pole*, t. j. wszystkie jego elementy, w których tylko **R** nie znika, wyraża się, po pierwszem przekształceniu, przez całkę obejmującą *same tylko źródła rurek* [wzór (151a)] i zawierającą ich potencyały, — po drugiem zaś przekształceniu — przez całkę obejmującą poszczególne *pary źródeł* [wzór (152)] i oprócz tego zależną *jedynie od wzajemnej odległości* każdych dwóch źródeł.

Innemi słowy: Według wzoru pierwotnego, czyli naszego określenia energii U możemy ją *zlokalizować* (jak się mówi), przypisując *każdemu elementowi pola* pewną ilość, a mianowicie ${}^1/_2 R^2 d\tau$; według drugiego wzoru możemy ją również zlokalizować, aczkolwiek w odmienny sposób, a mianowicie przypisując pewne ilości energii, ${}^1/_2 \varphi de$, *samym tylko źródłom rurek* (czyli siedliskom rozbieżności) i wykluczając wszelkie inne części pola; według trzeciego wreszcie wzoru energia U zgoła nie daje się zlokalizować: moglibyśmy tylko powiedzieć, że każdej *parze* źródeł odpowiada pewna jej ilość $\frac{1}{4\pi} \frac{de.de'}{r}$, związana ze *współistnieniem jednego i drugiego* źródła, a więc niedająca się przypisać całkowicie

ani jednemu ani drugiemu, ani też po części jednemu, po części zaś drugiemu.

(Uwagi te posiadają szczególne znaczenie w zastosowaniu do rzeczywistych zagadnień fizycznych, w których U jest energią w *zwykłem* znaczeniu słowa. Powyższe jednak wywody są od tego, oczywiście, zupełnie niezależne.)

Rozważmy teraz energię pola **R** czysto *solenoidalnego* i postarajmy się wyrazić ją przez momenty wirów, podobnie jak wyraziliśmy energię pola irotacyjnego przez natężenie źródeł.

Ponieważ dowolny wir daje się zawsze rozłożyć na nieskończenie cienkie rurki wirowe, czyli —jak je krótko nazywać będę— na *włókna* wirowe (opuszczając epitet „nieskończenie cienkie"), przeto, bez uszczerbku dla ogólności badania, możemy założyć, że w całem polu **R** znajduje się pewna liczba n takich *włókien wirowych*, o momentach $I_1, I_2, \ldots I_n$. Włókna te niechaj tworzą n pierścieni zamkniętych $s_1, s_2, \ldots s_n$ o danych kształtach i danem położeniu. Pole R niechaj zresztą obejmuje całą przestrzeń.

Aby otrzymać jego energię $U = {}^1/_2 \int R^2 d\tau$, obliczmy wartość całki $\int R^2 d\tau$ dla dowolnej rurki elementarnej tego pola; przekrój jej poprzeczny niechaj będzie $d\sigma$, a więc moment $Rd\sigma$; ponieważ pole jest solenoidalne, moment ten jest stały wzdłuż całej rurki, tak iż, oznaczając jej element długości przez $d\mathbf{s}$, mamy $\int R^2 d\tau = Rd\sigma \cdot \int \mathbf{R}\, d\mathbf{s}$, gdzie całka liniowa rosciąga się na całą długość rurki. Lecz każda taka rurka pola solenoidalnego jest zamknięta w sobie, a więc (według twierdzenia Stokes'a) musi być *spleciona* przynajmniej raz jeden z jednem z włókien wirowych; wogóle jednak może oplatać wiele takich włókien i więcej niż raz jeden. Niechaj więc rurka nasza będzie spleciona (w kierunku dodatnim) m_1 razy z włóknem wirowem s_1, m_2 razy z włóknem s_2, i t. d., wogóle m_K razy z włóknem wirowem s_K. Wówczas otrzymamy dla powyższej całki liniowej:

$$\int \mathbf{R} d\mathbf{s} = m_1 I_1 + m_2 I_2 + \ldots + m_n I_n = \sum_1^n{}_K m_K I_K,$$

a więc dla energii, powiedzmy ${}^1/_2 \int R^2 d\tau = dU$, zawartej w całej tej rurce:

$$dU = {}^1/_2 \, Rd\sigma . \sum_1^n m_K I_K = {}^1/_2 \sum_1^n I_K . m_K Rd\sigma.$$

Rozważmy nieco bliżej spółczynnik jakiegokolwiek I_K, t. j. $m_K Rd\sigma$. Rurka nasza jest spleciona m_K razy z włóknem czyli z obwodem zamkniętym s_K, t. j. przeszywa m_K razy dowolną powierzchnię σ_K ograniczoną przez s_K, wycinając z tej powierzchni m_K elementów powiedzmy $d\sigma_K'$, $d\sigma_K''$ i t. d., a dla każdego z tych elementów mamy jednę i tę samą wartość $Rd\sigma$, t. j. oznaczając przez ν wektor jednostkowy normalny do σ_K.

$Rd\sigma = \mathbf{R}'\nu' . d\sigma_K' = \mathbf{R}''\nu'' . d\sigma_K =$ i t. d. Iloczyn $m_K Rd\sigma =$ $= \mathbf{R}'\nu' d\sigma_K' + \mathbf{R}''\nu'' d\sigma_K'' + \ldots$ wyraża więc *całkę powierzchniową* (wektora $\mathbf{R}$) *przez powierzchnię* σ_K pochodzącą od samej tylko rozważanej rurki. Biorąc więc sumę (czyli całkę) wyrazów dU dla *wszystkich* rurek pola, obejmiemy wszystkie elementy $d\sigma_K$ każdej powierzchni σ_K (w których tylko $\mathbf{R}$ nie znika) i każdy z tych elementów tylko jeden raz; albowiem każda rurka pola przeszywa jakąś powierzchnię σ_K, a żadna rurka nie przecina samej siebie, t. j. żaden z elementów $d\sigma_K'$, $d\sigma_K''$ i t. d. nie występuje więcej niż jeden raz. Całkowita więc energia pola będzie

$$U = {}^1/_2 \sum_1^n I_K S_K, \tag{153}$$

gdzie

$$S_K = \int \mathbf{R}\nu d\sigma_K \tag{154}$$

jest całką powierzchniową wektora $\mathbf{R}$ przez powierzchnię σ_K ograniczoną włóknem wirowem s_K, normalna zaś ν jest zwrócona w kierunku oplatania dodatniego (p. Fig. 31).

Całkę tę powierzchniową, czyli liczbę rurek jednostkowych objętych przez obwód s_K, możemy nazwać krótko *indukcyą* (wektora $\mathbf{R}$) przez obwód s_K. Wówczas otrzymamy:

(Fig. 31).

Twierdzenie XII. Energia dowolnego pola *solenoidalnego* daje się wyrazić przez połowę sumy *iloczynów z momentów wszystkich włókien wirowych i indukcyi przez te włókna*:

$$U = {}^1/_2 \int R^2 d\tau = {}^1/_2 \sum I_K S_K.$$

Twierdzenie to jest analogiczne do pierwszej połowy Twierdzenia XI dla pola irotacyjnego. Aby otrzymać analogię *drugiej*

połowy tegoż twierdzenia, t. j. aby wyrazić energię pola solenoidalnego przez samą tylko konfiguracyę i momenty włókien wirowych, podobnie jak dla pola irotacyjnego wyraziliśmy ją przez rozmieszczenie i natężenie „źródeł“, — aby celu tego dopiąć, rozważmy co następuje.

Przypuśćmy, że zmieniliśmy *natężenie* R w każdym punkcie pola w jednym i tym samym stosunku $1:\lambda$, nie zmieniając zresztą nigdzie *kierunku* wektora **R**, a więc też kształtu, rozmiarów lub położenia żadnego włókna wirowego. Wówczas *moment* każdego włókna wirowego, który możemy wyrazić np. przez $I_K = \int \mathbf{R} ds$ (gdzie obwód s oplata włókno wirowe s_K jedyny raz, w kierunku dodatnim), zmieni się *w tymże* stosunku $1:\lambda$. Lecz w tym samym stosunku $1:\lambda$ zmieni się *indukcya* $S_K = \int \mathbf{R} v d\sigma_K$ przez s_K. Stąd więc wynika, że wielkości S_K, występujące we wzorze (153), powinny dać się przedstawić jako funkcye *liniowe jednorodne* momentów I_1, I_2 ... I_n włókien wirowych (i odwrotnie), t. j.:

$$(155) \qquad S_K = L_{K1} I_1 + L_{K2} I_2 + \ldots + L_{KK} I_K + \ldots + L_{Kn} I_n,$$

$$K = 1, 2, \ldots n,$$

gdzie spółczynniki L są wielkościami zależnemi jedynie od rozmiarów, kształtu i wzajemnego położenia włókien wirowych. Rozwiązując równania te ze względu na I, otrzymalibyśmy momenty wirów jako funkcye liniowe jednorodne indukcyj S.

Wprowadzając (155) do (153), otrzymamy

$$(156) \qquad U = {}^1/_2 \sum_1^n{}_j \sum_1^n{}_k L_{Kj} I_K I_j,$$

t. j. energię pola solenoidalnego jako funkcyę *jednorodną II-go stopnia momentów włókien wirowych.*

Aby otrzymać jeszcze wszystkie spółczynniki L w ich zależności od cech geometrycznych układu włókien wirowych, wróćmy do określenia indukcyi

$$S_K = \int \mathbf{R} v d\sigma$$

i postarajmy się wyrazić konkretnie wielkość S_K przez momenty I_1, I_2, ... I_n.

Ponieważ *div* **R** = o, możemy wprowadzić znany już nam po-

tencyał wektorowy **F**, t. j. położyć $\mathbf{R} = curl\ \mathbf{F}$; wówczas otrzymamy, według twierdzenia Stokes'a:

$$S_K = \int \nu \operatorname{curl} \mathbf{F}.d\sigma = \int \mathbf{F}\, d\mathbf{s}_K, \tag{157}$$

gdzie $d\mathbf{s}_K$ pojmujemy wektorowo. Lecz, kładąc $curl\ \mathbf{R} = \omega$, mamy, według wzoru (145)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\bar{\omega}}{r}\, d\tau, \tag{145 bis}$$

gdzie całkę należy rozciągnąć do wszystkich wirów. Wprowadzając znowu jako element objętości $d\tau$ cząstkę włókna wirowego o długości ds_j, otrzymamy:

$$F = \frac{1}{4\pi}\sum_1^n{}_j\, I_j \int_{(s_j)} \frac{d\mathbf{s}_j}{r}, \tag{158}$$

a więc według (157):

$$S_K = \frac{1}{4\pi}\sum_1^n{}_j\, I_j \int_{(s_K)}\int_{(s_j)} \frac{d\mathbf{s}_K\, d\mathbf{s}_j}{r}, \tag{159}$$

gdzie r jest odległością wzajemną elementów $d\mathbf{s}_K$, $d\mathbf{s}_j$.

Wzór ten daje nam istotnie indukcyę S_K jako funkcyę liniową jednorodną momentów I; przez porównanie zaś z wzorem (155) otrzymujemy stąd dla spółczynników L:

$$\left\{\begin{array}{l} L_{Kj} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{(s_K)}\int_{(s_j)} \frac{d\mathbf{s}_K\, d\mathbf{s}_j}{r}, \quad L_{KK} = \frac{1}{4\pi}\int_{(s_K)}\int_{(s_K)} \frac{d\mathbf{s}\,.\,d\mathbf{s}'}{r}, \\ \qquad\qquad K,\ j = 1, 2, \ldots n. \end{array}\right. \tag{160}$$

We wzorach tych $d\mathbf{s}_K$, $d\mathbf{s}_j$ oznaczają elementy dwóch różnych włókien wirowych (K i j), zaś $d\mathbf{s}$, $d\mathbf{s}'$ dwa elementy jednego i tego samego włókna wirowego. Wszystkie te elementy są tu pojęte *wektorowo*, tak iż $d\mathbf{s}\,.\,d\mathbf{s}' = ds\,.\,ds'\,.\,cos\,(d\mathbf{s}, d\mathbf{s}')$. Całka dla L_{KK} rozciąga się *dwukrotnie* na cały obwód s_K. Ze (160) widzimy bezpośrednio, że

$$L_{Kj} = L_{jK}. \tag{161}$$

Ponieważ zaś we wzorze (156) każdy moment I występuje dwa razy: raz jako I_K, drugi raz jako I_j, przeto wzór ten daje się ostatecznie napisać:

$$(162)\quad \begin{cases} U = {}^1/_2\, L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \ldots + L_{1n} I_1 I_n + {}^1/_2\, L_{22} I_2^2 + \ldots L_{2n} I_2 I_n \\ \qquad + \ldots + {}^1/_2\, L_{nn}\, I_n^2. \end{cases}$$

Dla uzupełnienia Twierdzenia XII możemy teraz wygłosić

Twierdzenie XIIa. Energia pola *solenoidalnego* daje się wyrazić jako funkcya *jednorodna drugiego stopnia momentów wszystkich wirów* [(156) lub (162)], o spółczynnikach zależnych jedynie od własności *geometrycznych* układu wirów, t. j. od ich kształtu, rozmiarów i konfiguracyi [wzór (160)].

Pisząc, dla dowolnych dwóch elementów włókien wirowych, o momentach I, I′:

$$I\mathbf{ds} = \mathbf{di}, \quad I'\mathbf{ds}' = \mathbf{di}',$$

tak, iż **di**, **di**′ są *wektorami* elementarnemi, mamy — jako odpowiadający im dodajnik w wyrazie energii U:

$$(163)\quad \frac{\mathbf{di}\,\mathbf{di}'}{r} = \frac{di \cdot di' \cos(\mathbf{di}, \mathbf{di}')}{r}$$

(z pominięciem stałego czynnika liczebnego), t. j. iloczyn skalarny elementów *wektorowych* wiru podzielony przez ich wzajemną odległość, zupełnie podobnie jak we wzorze (152) dla pola irotacyjnego, z tą tylko różnicą, że tam mieliśmy iloczyn dwóch *skalarów* $de.de'$, t. j. natężeń „źródeł“; różnica zaś ta polega na tem oczywiście, że *„źródła“* takie czyli siedliska rozbieżności nie mają nic wspólnego z kierunkami przestrzennemi, podczas gdy każdy element *wiru* oprócz natężenia czyli momentu posiada pewien określony kierunek w przestrzeni.

Co się tyczy „lokalizacyi“ energii U pola solenoidalnego, czytelnik może powtórzyć, *mutatis mutandis*, wszystkie nasze powyższe uwagi dotyczące energii pola irotacyjnego.

Zauważmy jeszcze, że ponieważ energia $U = {}^1/_2 \int R^2 d\tau$ jest

zawsze *dodatnią*, spółczynniki L w rozwinięciu (162) muszą czynić zadość pewnym powszechnie znanym warunkom, a mianowicie: wszystkie L_{KK} (o wskaźnikach *jednakowych*) muszą być *dodatnie*, a po za tem muszą być *dodatnie* wszystkie wyznaczniki:

$$(164)\quad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}, \text{ i t. d. } \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ L_{n1} & L_{n2} & & L_{nn} \end{vmatrix} \text{ i t. d.,}$$

które ze względu na (161) są wyznacznikami *symetrycznemi*; mamy więc np. $L_{11} L_{22} > L_{12}^2$ i t. d.

Znaczenie spółczynników L możemy łatwo wyczytać z równania (155) dla indukcyi S_K. Kładąc mianowicie $I_K = 1$, zaś $I_j = o$ dla wszelkich $j \gtrless k$, mamy: $S_K = L_{KK}$; spółczynnik L_{KK} wyraża więc liczbę rurek jednostkowych objętych przez włókno s_K, czyli indukcyę przez s_K odpowiadającą temuż samemu włóknu wirowemu o momencie równym jedności. Dlatego też możemy nazwać L_{KK} *spółczynnikiem samoindukcyi* obwodu s_K. Podobnie też, kładąc $I_j = 1$, zaś $I_K = o$ dla wszelkich $k \gtrless j$, mamy $S_K = L_{Kj}$, t. j.: L_{Kj} jest indukcyą przez obwód s_K pochodzącą od włókna wirowego s_j o momencie równym jedności; nazwiemy więc L_{Kj} *spółczynnikiem indukcyi wzajemnej* obwodów s_j i s_K. Ponieważ $L_{jK} = L_{Kj}$, przeto role obwodów s_K i s_j dają się dokładnie odwrócić.

Zauważmy jeszcze, że według wzorów (160) każdy spółczynnik samoindukcyi lub indukcyi wzajemnej posiada wymiary *długości*, a więc daje się mierzyć np. na centymetry lub kilometry.

Z równania (162) widzimy wreszcie, że $^1/_2 L_{KK}$ jest *energią własną* włókna wirowego s_K o momencie $= 1$, zaś L_{Kj} — *energią wzajemną* wirów s_K i s_j o momentach równych jedności.

Przez „energię wzajemną“ rozumiem tu określoną powyżej wielkość skalarną $\int \mathbf{R}'\mathbf{R}''d\tau$, t. j. w naszym wypadku $\int \mathbf{R}_j\mathbf{R}_K d\tau$, nie wiążąc z nią zresztą żadnych pojęć fizycznych.

ROZDZIAŁ I.

Pojęcia zasadnicze.

Rozdział I.

Pojęcia zasadnicze.

§ 1. Przebieg zjawisk elektromagnetycznych w danem środowisku zależy od dwojakiego rodzaju wielkości: od pewnych spółczynników *stałych*, lub w przybliżeniu niezmiennych, które charakteryzują własności specyficzne środowiska. i od pewnych dwóch *wektorów* wogóle *zmiennych* w czasie i przestrzeni, a mianowicie od *siły elektrycznej i siły magnetycznej*, które stale oznaczać będziemy przez **E**, względnie przez **M**. Określimy je bliżej w ciągu dalszym, aczkolwiek zakładamy znajomość nietylko wielu faktów doświadczalnych z omawianej dziedziny, lecz także określeń dokładnych siły elektrycznej i magnetycznej, opartych na działaniach mechanicznych wywieranych na małą kulkę, „naelektryzowaną", względnie na małą „igłę magnetyczną", które obiera się w pewien konwencyonalny sposób jako wzorce i które wprowadza się do rozważanej części przestrzeni.

Jeżeli rozważane środowisko porusza się, natenczas sposób rozwijania się zjawisk elektromagnetycznych zależy też pośrednio od kierunku i prędkości ruchu jego cząstek, a więc od jeszcze jednego wektora, o znaczeniu czysto kinematycznem, który może również być zmiennym w czasie i przestrzeni.

Owe „spółczynniki" środowiska poznamy wkrótce. Obecnie zaś zajmiemy się przedewszystkiem wektorem elektrycznym **E** i wektorem magnetytycznym **M**.

§ 2. Dana część przestrzeni („próżnej„ zresztą lub wypełnionej materyą ważką) lub cała przestrzeń, uważana jako miejsce istnienia sił **E** i **M**, nazywa się *polem elektrycznem* lub *magnetycznem* —, o ile istnieje w niej tylko **E** lub tylko **M**, — wogóle zaś *polem elektromagnetycznem*. Mamy tu przed sobą przypadki szczególne omówionego we *Wstępie* pola *wektorowego*. Jeżeli siły **E**, **M** są stałe czyli niezmienne w czasie, mówimy o polach *statycznych* (ele-

R. 22

ktro- lub magnetostatycznych lub też o superpozycyi jednych i drugich); w przeciwnym razie mówi się krótko o *polach zmiennych*.

Z góry już, t. j. przed rozwinięciem ogólnych równań różniczkowych pola, pragnąłbym zaznaczyć krótko, iż pole elektro*statyczne* może istnieć bez najmniejszego śladu sił magnetycznych i odwrotnie, tak iż własności pól statycznych jednego i drugiego rodzaju mogą być rozważane zosobna, że natomiast zmianie czasowej siły **E** w dziedzinie dowolnie małej, czyli tak zwanemu *zaburzeniu* pola elektrycznego, towarzyszą zawsze siły magnetyczne i odwrotnie. Zobaczymy też, że między zmianami czasowemi wektora **E** i rozmieszczeniem przestrzennem wektora **M**, i nawzajem, zachodzą pewne stosunki zasadnicze, których wyraz analityczny stanowić będzie istotną treść owych właśnie różniczkowych równań elektromagnetycznych. *Zmiennego* więc pola elektrycznego nie można zbadać zupełnie bez rozważania sił magnetycznych, jaknajistotniej z niem związanych, i odwrotnie.

Wektory nasze **E** i **M**, jak to można założyć na podstawie dostrzegalnych wyników doświadczenia, są wogóle *ciągłe w przestrzeni*, zarówno co do natężenia jakoteż i kierunku, z wyjątkiem atoli pewnych powierzchni. Tak np. na powierzchni granicznej między szkłem a powietrzem wektor elektryczny **E** może stać się nieciągłym, i to w sposób bardzo wyraźny, podobnie jak wektor magnetyczny **M** na granicy powietrza i żelaza. Po za tem można założyć, że obadwa te wektory posiadają wszędzie i zawsze *jednoznacznie* określone kierunki, i że natężenia ich — również jednoznaczne — nie stają się nigdzie *nieskończenie wielkiemi*.

W tych warunkach możemy do pola **E** lub **M** zastosować bezpośrednio wszelkie ogólne pojęcia i twierdzenia, które rozwinąłem we *Wstępie* dla dowolnego pola wektorowego **R**.

Co do tych pojęć, wystarczy tu poprostu wprowadzenie odpowiednich nazw, przy podstawieniu wektorów **E** lub **M** za wektor ogólny **R**; wprowadzimy zaś nazwy *takie*, które cieszą się powszechnem uznaniem.

Linie więc pola **E** lub **M** nazwiemy *liniami siły elektrycznej*, względnie *magnetycznej*, i będziemy mówili o *rurkach* (lub włóknach) *siły* zbudowanych z takich linij, w szczególności o rurkach *jednostkowych*, t. j. posiadających moment równy jedności. str. 33

Ze względu na jednoznaczność każdego z naszych wektorów dwie linie siły elektrycznej, lub magnetycznej, *nie przecinają się wzajemnie*; linia siły może się jednak *sama* przecinać, lecz wówczas w punkcie przecięcia mamy $\mathbf{E} = 0$, względnie $\mathbf{M} = 0$. Zbytecznem chyba byłoby objaśniać, iż linie elektryczne będą się wogóle przecinały z liniami magnetycznemi (o ile jedne i drugie istnieją); wektory bowiem **E** i **M** posiadają w tym samym punkcie pola elektromagnetycznego kierunki wogóle różne.

Całkę liniową siły **E**, względnie **M**, wziętą wzdłuż dowolnej

drogi (ciągłej) od punktu *a* do punktu *b*, nazywamy *siłą elektromotoryczną*, względnie *magnetomotoryczną* *) wzdłuż tej drogi, — która zresztą może być zamkniętą lub nie. Całkom tym będą przysługiwały wszelkie własności rozwinięte we Wstępie dla całki liniowej dowolnego wektora **R**.

Określenia te możemy napisać krótko:

$$\text{S.E.M.} = \int \mathbf{E}\,ds, \quad \text{S.M.M} = \int \mathbf{M}\,ds.$$

§ 3. Rozważając, jako drogę całkowania, krzywą *zamkniętą* i rozkładając ją na coraz to gęstszą sieć malejących obwodów zamkniętych, jak we Wstępie, otrzymamy w granicy (zakładając, że **E**, **M** są wogóle różniczkowalne) pojęcia wektorów *curl* **E** i *curl* **M**, tudzież zastosowane do każdego z nich twierdzenie Stokesa:

$$(1) \qquad \int \nu \operatorname{curl} \mathbf{E}\,d\sigma = \oint \mathbf{E}\,ds, \quad \int \nu \operatorname{curl} \mathbf{M}\,d\sigma = \oint \mathbf{M}\,ds.$$

Linie zlewające się wszędzie z kierunkiem wektora *curl* **E**, względnie *curl* **M**, będę nazywał *liniami wirowemi* pola **E**, względnie **M**, lub liniami wirowemi *elektrycznemi*, względnie *magnetycznemi*, rurkę zaś zbudowaną z takich linij będę krótko nazywał *wirem elektrycznym*, względnie — *magnetycznym*.

Posługując się określeniem danem na końcu § 2, możemy według (1) powiedzieć, że S.E.M, względnie S.M.M., *wzdłuż obwodu zamkniętego równa się* (identycznie, t. j. niezależnie od jakichś szczególnych własności fizycznych naszych wektorów) *liczbie wirów jednostkowych elektrycznych, względnie magnetycznych, objętych przez ten obwód czyli splecionych z nim*.

Przez wir *jednostkowy* rozumiem oczywiście rurkę wirową o momencie równym jedności.

Ponieważ *curl* **E**, *curl* **M** są solenoidalne, przeto wszelkie wiry elektryczne i magnetyczne są *zamknięte w sobie* (o ile nie biegną obustronnie w nieskończoność) i posiadają w całej swej długości *jeden i ten sam moment*.

Zauważmy, że moment ten, stały wzdłuż całej rurki wirowej (w danej chwili), może jednak zmieniać się z czasem; zobaczymy też, że prędkość jego zmiany w wirach magnetycznych lub elektrycznych posiada dla teoryi omawianych zjawisk pierwszorzędne znaczenie.

---

*) Obrałem terminy te międzynarodowe zamiast polskich: elektro- i magneto-*bodźcza*, aby je następnie wygodniej zestawić (a przynajmniej pierwszą z nich) ze „siłą *ponderomotoryczną*“, której — o ile wiem — dotychczas nie spolszczono. Zresztą „elektro-“ lub „magneto-“ są również mało polskie jak „motoryczny“.

Nazewnątrz wirów elektrycznych siła **E** posiada *potencyał elektryczny* φ, nazewnątrz zaś wirów magnetycznych siła **M** posiada *potencyał magnetyczny* ψ, t. j.:

(2) $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, gdzie *curl* $\mathbf{E} = 0$; $\mathbf{M} = -\nabla\psi$, gdzie *curl* $\mathbf{M} = 0$.

Potencyały te są funkcyami *skalarnemi* położenia punktu, a mianowicie funkcyami *wielo*wartościowemi; patrz Wstęp, Twierdzenie VIII.

Jeżeli całe pole elektryczne, lub magnetyczne, jest irotacyjne, czyli pozbawione wirów, lub też, jeżeli poruszamy się w pewnej jego dziedzinie *irotacyjnej acyklicznej*, natenczas φ, względnie ψ, są funkcyami *jedno*wartościowemi, tak iż dla dowolnych dwóch punktów a, b takiej dziedziny mamy

(3) $$\text{S.E.M.} = \int_a^b \mathbf{E}d\mathbf{s} = \varphi_a - \varphi_b, \quad \text{S.M.M.} = \int_a^b \mathbf{M}d\mathbf{s} = \psi_a - \psi_b.$$

W dziedzinie takiej możemy zbudować szereg *powierzchni izopotencyalnych* elektrycznych, względnie magnetycznych

$$\varphi = \text{const.}, \text{ wzdlędnie } \psi = \text{const.}$$

Odpowiednie linie i rurki siły przeszywają wszystkie te powierzchnie *normalnie*.

Część rurki jednostkowej, zawarta między dwiema takiemi powierzchniami o różnicy potencyałów równej jedności, nazywa się *komórką jednostkową* elektryczną, względnie magnetyczną.

Szczególne własności fizyczne pól irotacyjnych poznamy dopiero w dalszym ciągu, a mianowicie po rozwinięciu ogólnych równań różniczkowych, według których zmieniają się pola elektromagnetyczne z czasem.

§ 4. Przechodząc do pojęcia *całki powierzchniowej*, wprowadzimy nazwy *indukcyi elektrycznej*, względnie *magnetycznej*, *przez powierzchnię* σ, dla całek

$$\int \mathbf{E}\nu d\sigma, \text{ względnie } \int \mathbf{M}\nu d\sigma,$$

lecz jedynie wówczas tylko, gdy cała powierzchnia σ, zamknięta lub ograniczona, przebiega w *próżni* lub, co prawie na to samo wychodzi, w powietrzu. Dla innych ośrodków natomiast będziemy nazywali indukcyą elektryczną lub magnetyczną całki powierzchniowe nie samych sił **E**, i **M** lecz pewnych innych wektorów (**D**, **B**), które niebawem określimy, a które w próżni stają się identyczne ze siłami **E**, **M**.

To uwzględnienie własności charakterystycznych i odmiennych dla różnych ciał lub środowisk stało się niezbędne, odkąd zauwa-

żono konkretnie wpływ, częstokroć bardzo znaczny, środowiska na działania elektryczne i magnetyczne między bryłami w niem zanurzonemi, bryłami, które pozornie tylko działają „na odległość“ i — jak dawniej sądzono — niezależnie od natury fizycznej środowiska, które jednak w istocie posługują się jego pośrednictwem. Tak np. pojemność kondensatora elektrycznego staje się przeszło dwa razy większa, skoro między jego okładkami znajduje się benzol zamiast powietrza, a wzrost ten pojemności osiąga wartość 5—7 dla rozmaitych gatunków szkła, około 26 dla alkoholu, a nawet 80 dla czystej wody, *caeteris paribus;* energia elektryczna (pojęcie to poznamy bliżej w ciągu dalszym) nagromadzona między okładkami kondensatora wzrasta również w tychże stosunkach dla wymienionych substancyj, przy jednem i tem samem natężeniu siły elektrycznej. Podobne też uwagi stosują się do zjawisk magnetycznych, o czem niejednokrotnie będziemy mieli sposobność mówić.

§ 5. Wyobraźmy sobie część pola elektrostatycznego roztaczającą się w próżni; wprowadźmy do danej jego dziedziny bryłę B dowolnej substancyi (np. szkła), a mianowicie taką, która pierwotnie *nie* była otoczona własnem polem elektrycznem, czyli — jak się mówi — bryłę pierwotnie *nienaelektryzowaną*. Wówczas, badając linie siły przed i po wprowadzeniu ciała B, t. j. po nastąpieniu nowego stanu równowagi, zobaczymy, że będą one w ogóle odkształcone i przesunięte; innemi słowy: ciało B spowoduje zaburzenie lub odkształcenie danego pola. Zmieni się w ogóle nietylko kierunek, lecz i natężenie wektora $\mathbf{E}$, szczególniej w punktach bliskich bryły B. Linie siły elektrycznej przenikną też w ogóle do wnętrza tej bryły.

Przypomnijmy sobie tu określenie siły elektrycznej. Przedewszystkiem, gdy chodzi o pole elektryczne w próżni, nazywamy kierunkiem i natężeniem siły elektrycznej $\mathbf{E}$ kierunek i natężenie *siły mechanicznej* $\mathbf{F}$ (po wyrugowaniu siły ciężkości i t. d.) działającej na małą bryłkę, np. na małą kulkę, naelektryzowaną w pewien sposób *), obraną jako wzorzec i wprowadzoną do danego miejsca pola.

Gdybyśmy zamiast tej bryły wzorcowej a użyli dla zbadania pola innej bryłki naelektryzowanej a', otrzymalibyśmy kierunki te same lecz natężenia siły $\mathbf{E}$ różne od poprzednich, a to w każdym punkcie; wszystkie te natężenia byłyby atoli *proporcyonalne* do pierwotnych. (Można to uważać jako fakt doświadczalny.) Wynika

*) t. j. otoczoną liniami elektrycznemi wówczas nawet gdy znajduje się w dziedzinie odległej, w której siły rozważanego pola stają się już niedostrzegalne. Jako wzorzec można obrać np. jednę z dwóch kulek metalowych, naelektryzowanych podczas gdy znajdowały się w zetknięciu ze sobą, a które następnie, w pewnej od siebie odległości, np. 1 cm., odpychają się wzajemnie z pewną siłą, równą np. jednej dynie.

stąd, że posługując się jakąkolwiek bryłką a', możemy wyrazić siłę elektryczną **E** jako iloczyn dwóch czynników: $\mathbf{E} = m\,\mathbf{F}$, z których pierwszy ($m$) jest wielkością skalarną i charakteryzuje bryłkę a' w porównaniu z bryłką wzorcową a, drugi zaś (**F**) jest wektorem i odpowiada różnym kierunkom i natężeniom panującym w różnych punktach pola, czyli charakteryzuje samo to pole. Wielkość liczebną m możemy obrać dowolnie, kładąc ją np. równą jedności dla pewnej bryłki obranej konwencyonalnie; wówczas będzie poprostu $\mathbf{E} = \mathbf{F}$.

Analogicznie określamy siłę magnetyczną **M**, obierając jako ciało wzorcowe daną igiełkę magnetyczną, która posiada np. kształt walca o przekroju kołowym bardzo małym w porównaniu z jego długością; kierunek (sn) igły, której środek znajduje się w danym punkcie pola, daje nam kierunek siły magnetycznej, zaś wielkość każdej z dwóch sił mechanicznych, które możemy uważać jako przyczepione do końców (biegunów) igły i które tworzą „parę sił“, daje nam natężenie siły **M** w tym punkcie pola.

Oto są określenia wektorów **E** i **M** w próżni lub np. (w przybliżeniu) w powietrzu.

Gdy natomiast chodzi o substancye dostrzegalnie różne od tych środowisk, a więc np. o szkło — dla **E**, lub żelazo — dla **M**, określenia te można sformułować w sposób następujący.

Wyobraźmy sobie, że w danem miejscu rozważaej bryły B wydrążono mały kanał, usuwając zeń substancyę B i pozostawiając „próżnię“, i że do kanału tego wprowadzono ciało wzorcowe a, elektryczne, względnie magnetyczne. Wówczas siły **E**, względnie **M**, tak otrzymane i mierzone przez odpowiednie siły mechaniczne **F**, które działają na a, będą *w ogóle* zależały nietylko od położenia, lecz również od wielkości, kształtu i oryentacyi kanału wydrążonego, a oprócz tego od natury samej substancyi B, która go otacza. Jeżeli jednak kanał ten posiada kształt podłużny, np. cylindryczny, i jeżeli długość jego jest bardzo wielka w porównaniu z wymiarami przekroju poprzecznego, i jeżeli oś tego kanału jest równoległa do **F** (a można wyobrazić sobie, że kierunek ten udało nam się znaleść po całym szeregu prób), wówczas wartości **F** tak otrzymane, a więc **E**, względnie **M**, *nie zależą* ani od kształtu przekroju kanału, *ani też od substancyi* samego ciała B; otóż, tak określone i znalezione wektory **E**, **M** nazywają się *siłami: elaktryczną*, względnie *magnetyczną*, w tem miejscu bryły B, w którem wydrążono kanał. W tem też znaczeniu słowa mówiliśmy o *liniach siły* przebiegających w tej bryle.

Wróćmy teraz do rozważania bryły B wprowadzonej do danego pola —, powiedzmy A, — które rozciąga się w próżni. Śledząc za liniami siły, zobaczylibyśmy przedewszystkiem, że w ogóle

przenikają one do wnętrza B *); zauważylibyśmy następnie, że w ogóle siły $\mathbf{E}$, $\mathbf{M}$ zmieniają przy przejściu przez powierzchnię graniczną ciała B w sposób *nieciągły* zarówno swe natężenie jak i kierunek, czyli *załamują się*. Pamiętajmy, że, gdy chodzi o pole elektryczne, bryła B ma być pierwotnie *nienaelektryzowana*, gdy zaś chodzi o pole magnetyczne — *„nienamagnesowana“*, t. j. nie posiadać własnego pola magnetycznego. Wówczas, na podstawie doświadczenia, możemy powiedzieć, że

1-o składowe *styczne* do powierzchni ciała B pozostają *ciągłe* przy przejściu przez tę powierzchnię,

2-o składowe zaś *normalne* sił $\mathbf{E}$, względnie $\mathbf{M}$, są w ogóle *nieciągłe*, t. j. doznają skoku przy przejściu przez tę powierzchnię.

Niechaj $\mathbf{E}_0$ i $\mathbf{E}$, względnie $\mathbf{M}_0$ i $\mathbf{M}$ będą siły el. i mgnt. w próżni i wewnątrz ciała B, w dwóch punktach nieskończenie bliskich po jednej i drugiej stronie jego powierzchni; oznaczmy przez ν normalną jednostkową do tej powierzchni, przez Θ zaś wektor jednostkowy w kierunku spólnej składowej stycznej (dla $\mathbf{E}$, względnie dla $\mathbf{M}$). Powyższe dwie własności możemy wówczas napisać krótko:

$$(4)\quad \begin{cases} \mathbf{E}\Theta = \mathbf{E}_0\Theta, \text{ względnie } \mathbf{M}\Theta = \mathbf{M}_0\Theta \\ \mathbf{E}\nu = \mathbf{E}_0\nu, \text{ względnie } \mathbf{M}\nu = \mathbf{M}_0\nu. \end{cases}$$

Określenie. Stosunek

$$(5)\qquad \mathbf{E}_0\nu : \mathbf{E}\nu = K$$

nazywamy *spółczynnikiem dielektrycznym*, zaś stosunek

$$(6)\qquad \mathbf{M}_0\nu : \mathbf{M}\nu = \mu$$

przenikliwością magnetyczną (permeability) nienaelektryzowanej, względnie nienamagnesowanej bryły B względem próżni.

Mamy tu na myśli bryłę izotropową i jednorodną; inaczej bowiem wartość powyższych stosunków byłaby różną dla różnych punktów i dla różnych kierunków.

Z tego, cośmy wyżej powiedzieli, t. j. z pierwszych dwóch równań (4), i z określenia K, μ, wynikają dla załamania linij siły następujące prawa:

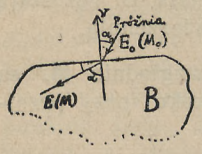
---

*) O pewnych ciałach, w których — przynajmniej w stanie równowagi — niema śladu siły elektrycznej, czyli o tak zwanych „przewodnikach“, w dalszym ciągu będzie mowa.

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha_0 : \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{K}, \\ \text{względnie } \operatorname{tg}\alpha_0 : \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\mu}, \end{cases}$$

gdzie α_0 jest kątem „padania“, α zaś kątem „załamania“; **E**, $\mathbf{E}_0$, ν, względnie **M**,$\mathbf{M}_0$,ν, leżą w jednej płaszczyznie; patrz Fig. 32.

Zgodnie z wzorami (7) nie zachodzi tu nigdy nic podobnego do zupełnego odbicia optycznego, ani dla linij elektrycznych, ani też magnetycznych, o ile ani K ani μ nie posiadają warstości ∞ lub 0.



(Fig: 32).

Istotnie, kątowi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ odpowiadałoby $K = \infty$, względnie $\mu = \infty$, zaś kątowi $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ odpowiadałoby $K = 0$, względnie $\mu = 0$.

Przypuśćmy, że zbadano dwa różne ciała 1 i 2, zanurzając je kolejno w danem polu siły rozciągającem się w próżni, i że tym sposobem znaleziono dla ich spółczynników wartości K_1, K_2, względnie μ_1, μ_2. Otóż, gdybyśmy dwa te ciała wprowadzili w zetknięcie ze sobą i zbadali przebieg linij siły przy powierzchni granicznej między 1 a 2, otrzymalibyśmy jako prawa załamania:

$$(8)\quad \operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = K_1 : K_2, \text{ względnie } \operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \mu_1 : \mu_2.$$

Stosunki te nazywają się: spółczynnikiem dielektrycznym i przenikliwością magnetyczną ciała 1 *względem ciała 2*, i jako takie są spółczynnikami „właściwemi“ (jak np. „ciężar właściwy“). Mówiąc krótko o spółczynnikach K, μ, rozumie się konwencyonalnie ich wartości wzięte względem *próżni* lub — w przybliżeniu — względem powietrza, którym przypisuje się wówczas spółczynniki $K=1$, $\mu = 1$.

Z tego, cośmy powiedzieli, wynika bezpośrednio, że załamanie linij siły będzie tem znaczniejsze, im bardziej różnym od jedności jest stosunek spółczynników stykających się środowisk; w szczególnym zaś wypadku, gdy chodzi o bryłę (B) wprowadzoną do danego pola rozciągającego się w środowisku O, odkształcenie pola spowodowane przez wprowadzenie tej bryły będzie, *caeteris paribus*, tem większe, im bardziej spółczynnik (K lub μ) bryły B różni się od spółczynnika (K_0, względnie μ_0) środowiska O.

Zauważmy już teraz, krótko przynajmniej, że K posiada wartości bardzo różne dla rozmaitych i to dla bardzo wielu substancyj, podczas gdy μ jest prawie dla wszystkich znanych ciał nieznacznie tylko różne od 1 i osiąga wartości wielkie, i to bardzo wielkie, jedynie tylko dla kilku ciał, jak stal i żelazo; dla że-

tzw. ferromagnetycznych

łaza np. (przy umiarkowanem natężeniu siły magnetycznej) jest $\mu = 400$. Przenikliwość μ jest zresztą w ogóle funkcyą natężenia siły **M**, i tylko w pewnych granicach, dla sił dosyć słabych, można ją uważać jako stałą, podczas gdy spółczynnik K możemy uważać jako niezależny od **E** nawet w granicach bardzo obszernych. Dalej, z doświadczenia znane nam są ciała zarówno o przenikliwości $\mu > 1$, t. zw. *paramagnetyczne*, jakoteż posiadające $\mu < 1$, zwane *diamagnetycznemi*, podczas gdy K jest dla wszystkich ciał dotychczas poznanych albo większym, albo dostrzegalnie równym, *lecz nigdy mniejszym od jedności*, t. j. nigdy mniejszym, niż dla próżni. Lecz zarówno K jak i μ są zawsze *dodatnie*, nigdy zaś ujemne, innemi słowy: składowa normalna $\mathbf{E}_\nu$ lub $\mathbf{M}_\nu$ może zmieniać swe natężenie w słabszym lub silniejszym stopniu, lecz nigdy nie odwraca swego kierunku u powierzchni granicznej ciała nienaelektryzowanego, względnie nienamagnesowanego, a zanurzonego w polu jakiemkolwiek.

Dotychczas mówiliśmy o ciałach *izotropowych* i *jednorodnych* pod względem elektrycznym lub magnetycznym.

Jeżeli wartość K, lub μ są różne w różnych punktach ciała, nazywamy ciało to elektrycznie — lub magnetycznie *niejednorodnem*.

Jeżeli wartości K lub μ zależy od kierunku siły **E**, względnie **M**, ciało nazywa się *anizotropowem* lub *krystalicznem*, pod względem elektrycznym lub magnetycznym. Ciała takie są scharakteryzowane w ogóle przez *trzy* różne wartości *główne* K_1, K_2, K_3, względnie μ_1, μ_2, μ_3, które odpowiadają trzem kierunkom *wzajemnie prostopadłym*, t. zw. kierunkom głównym czyli *osiom elektrycznym* względnie *magnetycznym*. W dalszym ciągu zobaczymy, jaki zachodzi stosunek między temi osiami a osiami optycznemi kryształu.

§ 6. Możemy teraz wygłosić następujące

Określenie. Dla środowiska izotropowego nazywam *polaryzacyą elektryczną*, względnie *magnetyczną*, w punkcie, w którym panują siły **E**, **M**, iloczyny

(9) $$\mathbf{D} = K\mathbf{E}, \text{ względnie } \mathbf{B} = \mu\mathbf{M} \text{ *).}$$

Jeżeli chodzi natomiast o ciało krystaliczne, natenczas — obierając jego trzy osie główne jako osie normalne jednostkowe **i**, **j**, **k** i oznaczając odpowiednie składowe sił przez E_1 i t. d.—nazywam *polaryzacyą* el., względnie mgnt., wektory

---

*) Wektor **D** (lub $\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}$) nazywa się też często *przesunięciem elektrycznem* (*electric displacement*, według *Maxwella*), zaś **B** — *indukcyą* w danym punkcie.

$$(10)\quad \begin{cases} \mathbf{D} = \mathbf{i}.K_1E_1 + \mathbf{j}.K_2E_2 + \mathbf{k}.K_3E_3, \\ \text{względnie } \mathbf{B} = \mathbf{i}.\mu_1M_1 + \mathbf{j}.\mu_2M_2 + \mathbf{k}.\mu_3M_3. \end{cases}$$

Możemy zresztą i w wypadku ciała *krystalicznego* napisać

$$(10a)\quad \mathbf{D} = K\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{M},$$

rozumiejąc atoli przez „K“ lub „μ“ nie zwykłe, skalarne spółczynniki lecz *operatory wektorowe liniowe* (patrz Wstęp). Obiecując sobie wrócić jeszcze do tego przedmiotu, zaznaczę tu krótko tylko, że obadwa te operatory są *symetryczne*, w znaczeniu słowa objaśnionem we Wstępie, tak iż obierając zamiast osi kryształu dowolne osie spółrzędnych x, y, z i pisząc $D_1 = K_{11}E_1 + K_{12}E_2 + K_{13}E_3$, $D_2 = K_{21}E_1 + K_{22}E_2 + K_{23}E_3$, i t. d., mielibyśmy $K_{12} = K_{21}$, i t. d., i podobnie $\mu_{12} = \mu_{21}$, i tak dalej.

Kierunek i natężenie polaryzacyi są w ogóle *różne* od kierunku i natężenia odpowiedniej siły; kierunki **E** i **D**, względnie **M** i **B**, zlewają się ze sobą jedynie wzdłuż osi głównych kryształu, elektrycznych względnie magnetycznych (a pierwsze mogą oczywiście być różne od drugich; zestawiamy tu wszędzie **E** i **M** li tylko dla tego, aby uniknąć niepotrzebnych powtórzeń; o związku fizycznym zjawisk jednego i drugiego rodzaju dotychczas nie mówimy ani też nie myślimy).

Jedynie w ciele lub środowisku izotropowem, a taką jest też „próżnia“, polaryzacya ma wszędzie ten sam kierunek co odpowiednia siła, tylko natężenia ich są różne, o ile mianowicie $K \neq 1$, względnie $\mu \neq 1$.

Ponieważ **D**, **B** są wektorami, możemy też skonstruować *linie i rurki polaryzacyi* elektrycznej lub magnetycznej. Zastosujemy teraz pojęcie całki powierzchniowej do każdego z tych wektorów.

Określenie. Dla ciała lub środowiska dowolnego, t. j. jednorodnego lub niejednorodnego, izotropowego lub krystalicznego, nazywam całki powierzchniowe

$$\int \mathbf{D}\nu d\sigma, \qquad \int \mathbf{B}\nu d\sigma$$

indukcyą elektryczną, względnie *indukcyą magnetyczną przez powierzchnię* σ.

Ponieważ dla „próżni“ jest $K = 1$, $\mu = 1$, przeto określenie dane na początku § 4 jest tylko przypadkiem szczególnym niniejszego określenia ogólnego.

Określone tu indukcye są oczywiście identyczne z liczbami rurek jednostkowych polaryzacyi (**D** lub **B**) przeszywających daną powierzchnię σ.

Do jednej lub drugiej indukcyi możemy zastosować bezpośrednio wszystko to, cośmy powiedzieli we Wstępie o całce powierzchniowej dowolnego wektora **R**.

Powierzchnia σ może, w myśl powyższego określenia, być zamkniętą lub ograniczoną.

W szczególności, gdy chodzi o powierzchnię σ zamkniętą, ograniczającą zupełnie pewną część pola τ, w której $\mathfrak{D}$ lub $\mathfrak{B}$ są *ciągłe*, mamy [porówn. Wstęp, wzór (66)]:

$$(11) \qquad \int \mathfrak{D}\nu.d\sigma = \int \operatorname{div} \mathfrak{D}.d\tau, \text{ względnie } \int \mathfrak{B}\nu.d\sigma = \int \operatorname{div} \mathfrak{B}.d\tau,$$

gdzie ν jest normalną *zewnętrzną*, zawsze jednostkową.

Jeżeli zaś w dziedzinie τ znajdują się powierzchnie (σ_i) *nieciągłości*, mamy [według (67), Wstęp]:

$$(11a) \qquad \int \mathfrak{D}\nu.d\sigma = \int \operatorname{div} \mathfrak{D}.d\tau + \sum \int (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D})\nu_i d\sigma_i;$$

zastępując $\mathfrak{D}$ przez $\mathfrak{B}$, otrzymamy odpowiedni wzór dla indukcyi magnetycznej.

Określenie. Wielkość $div\mathfrak{D}.d\tau$ lub $(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D})\nu_i\, d\sigma_i$, t. j. liczbę rurek jednostkowych *polaryzacyi* elektrycznej wychodzących z elementu objętości $d\tau$, względnie z elementu powierzchni $d\sigma_i$, nazywamy *ładunkiem* lub *elektrycznością prawdziwą* *) zawartą w $d\tau$ lub na $d\sigma_i$. Analogiczną wielkość $div\ \mathfrak{B}.d\tau$ lub $(\mathfrak{B}' - \mathfrak{B})\nu_i d\sigma_i$ nazywamy *magnetyzmem* prawdziwym.

Elementy $d\tau$, $d\sigma_i$, w których $div\ \mathfrak{D} \neq 0$ lub $(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D})\nu_i \neq 0$, względnie $div\ \mathfrak{B} \neq 0$ lub $(\mathfrak{B}' - \mathfrak{B})\nu_i \neq 0$, możemy nazwać *źródłami* rurek polaryzacyjnych elektrycznych, względnie magnetycznych.

Gęstość (przestrzenna) elektryczności będzie

$$(12) \qquad \rho = \operatorname{div} \mathfrak{D},$$

zaś gęstość powierzchniowa:

$$(12a) \qquad \eta = (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D})\nu_i;$$

dla magnetyzmu otrzymamy analogiczne wyrazy $div\mathfrak{B}$, $(\mathfrak{B}' - \mathfrak{B})\nu_i$, dla których jednak nie wprowadzę żadnych specyalnych symbolów, albowiem nie będą nam one potrzebne. Z góry już bowiem pragnę zaznaczyć, że magnetyzm prawdziwy, o ile sądzić można z ogółu dotychczasowych doświadczeń, nigdzie i nigdy *nie istnieje*; innemi słowy: polaryzacya magnetyczna $\mathfrak{B}$ posiada wszędzie i zawsze rozmieszczenie czysto *solenoidalne*.

Posługując się powyższem określeniem, możemy zamiast (11a)

---

*) Dla odróżnienia od „pozornej“, której określenie podamy niebawem. Mówiąc krótko o „elektryczności“, będę rozumiał — „prawdziwą“.

powiedzieć, że *indukcya elektryczna zewnętrzna przez powierzchnię zamkniętą* σ *równa się sumie algebraicznej wszystkich ładunków elektrycznych zawartych w przestrzeni* τ *ograniczonéj przez* σ.

Zauważmy, że nie jest to dla nas żadnem twierdzeniem fizycznem lecz poprostu innem tylko wysłowieniem przekształcenia czysto matematycznego (11a), które zachodzi dla dowolnego wektora.

To samo moglibyśmy powiedzieć o indukcyi *magnetycznej* przez σ i o stosunku jej do zawartych w τ „magnetyzmów“; byłoby to jednak zupełnie zbyteczne, albowiem wszystkie te magnetyzmy znikają: *div* $\mathfrak{B} = 0$ i składowa *normalna* jest wszędzie ciągła.

Dla wektora $\mathfrak{B}$ wystarcza więc, jeżeli powiemy, że *indukcya magnetyczna dla każdej powierzchni zamkniętej jest zerem:*

$$(13) \qquad \int \mathfrak{B}_\nu . d\sigma = 0.$$

Do punktu tego wrócimy jeszcze zresztą kilkakrotnie.

Usprawiedliwienie zaś nazwy „elektryczność“ („prawdziwa“), z którem czytelnik wiąże już pewne skądinąd nabyte pojęcia, otrzymamy stopniowo, w miarę rozwijania się naszych wywodów. W tem miejscu zauważę tylko, że — według powyższego określenia — „elektryczność“ posiada dla nas w najlepszym razie taki sam stopień realności, jak rurki polaryzacyi, ale w każdym razie *nie* większy.

Dla naszej bryły B pierwotnie „nienaelektryzowanej“ otrzymalibyśmy, według określenia spółczynnika dielektrycznego i oznaczając przez K, K' spółczynniki tej bryły i środowiska:

$$\mathfrak{E}_\nu : \mathfrak{E}'_\nu = K' : K, \text{ t. j. } K\mathfrak{E}_\nu - K'\mathfrak{E}'_\nu = 0,$$

czyli według określenia polaryzacyi:

$$\mathfrak{D}_\nu - \mathfrak{D}'_\nu = 0 \text{ lub też } (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D})_\nu = 0,$$

t. j. według określenia ładunku elektrycznego powierzchniowego:

$$\eta = 0.$$

Bryła więc ta, a raczej jej powierzchnia, będzie pozbawiona ładunku *prawdziwego*, czyli nienaelektryzowana we właściwem znaczeniu słowa.

Podobnie też znajdziemy dla bryły takiej, która pierwotnie nie posiadała własnych rurek polaryzacyi, dla wszystkich jej punktów *wewnętrznych*: div $\mathfrak{D} = 0$, chociaż po wprowadzeniu jej do danego pola elektrycznego (jak wyżej) dla punktów jej wewnętrznych będzie wogóle $\mathfrak{D} \neq 0$.

Wprowadzając więc do dziedziny τ dowolną bryłę, o jakimkolwiek spółczynniku dielektrycznym, byle tylko pierwotnie niena-

elektryzowaną, nie zmieniamy przez to wartości *całkowitej* indukcyi elektrycznej przez powierzchnię σ ograniczająca tę dziedzinę τ, aczkolwiek rozmieszczenie rurek polaryzacyi może dzięki temu uledz znacznym zmianom.

Co do powierzchni nieciągłości składowej normalnej polaryzacyi, t. j. $\mathbf{D}\nu$ (a jak wyżej pisaliśmy $\mathbf{D}\nu_i$ dla pow. σ_i), możemy na podstawie doświadczenia powiedzieć, że nie istnieją one wewnątrz ciał jednorodnych, ani też np. w próżni, lecz tylko na granicy dwóch stykających się ze sobą ciał o różnych własnościach fizycznych, i to różnych nietylko pod względem elektrycznym, —że więc ładunki powierzchniowe na *takich tylko* istnieją powierzchniach.

Toż samo stosuje się prawdopodobnie do $div\,\mathbf{D} = \rho$, t. j. ρ bywa różne od zera tylko wewnątrz ciał *niejednorodnych*.

Ładunki powierzchniowe można zresztą uważać zawsze jako wypadek graniczny bardzo cienkich warstw elektryczności rozmieszczonej przestrzennie. Skorzystamy z tej uwagi i rozwiniemy ją dokładniej przy wyprowadzaniu warunków granicznych z ogólnych równań różniczkowych pola elektromagnetycznego (porówn. Rozdział II).

Zestawiając to, cośmy zaznaczyli tymczasowo o rurkach polaryzacyi jednego i drugiego rodzaju, możemy powiedzieć krótko, że *rurki polaryzacyi magnetycznej są zawsze solenoidalne, czyli tworzą pierścienie zamknięte lub biegną obustronnie w nieskończoność, czyli wreszcie: nie mają nigdzie ani początku ani końca*, podczas gdy *rurki polaryzacyi elektrycznej zaczynają lub kończą się wogóle w pewnych dziedzinach*, — możemy dodać: w dziedzinach niejednorodności fizycznej.

Tak np. na granicy powietrza i szkła potartego jedwabiem pewna liczba rurek polaryzacyi elektrycznej bierze swój początek, zaś np. na powierzchni żywicy potartej futrem lisiem pewna liczba takich rurek kończy się. Przy wszystkich takich procesach elektryzacyi powstają zresztą jednakowe ilości ładunku dodatniego i ujemnego, t. j. tyleż początków ile końców rurek polaryzacyjnych jednostkowych. Stąd wynika np., że podczas odbywania się takiego procesu wewnątrz pewnej dziedziny (τ) nie zmienia się indukcya całkowita przez ograniczającą ją powierzchnię (σ).

W dalszym ciągu dopiero zobaczymy, jakie są warunki zmian lub trwania ładunku elektrycznego w danym elemencie przestrzeni lub w danej cząstce ciała materyalnego. Obecnie chodziło mi głównie o objaśnienie wyrazów, któremi w dalszych rozważaniach wypadnie nam się posługiwać.

§ 7. Podstawiając, w powyższych określeniach, *siły* $\mathbf{E}$, $\mathbf{M}$ zamiast polaryzacyj $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, otrzymamy określenie *elektryczności pozornej*, względnie *magnetyzmu pozornego* *), rozmieszczonych prze-

*) zwanych również *swobodnemi*.

strzennie lub powierzchniowo. Innemi słowy: nazywamy ładunkiem *pozornym* liczbę rurek jednostkowych *siły* wychodzących z danego elementu objętości lub powierzchni.

Dla gęstości przestrzennej ładunku pozornego elektrycznego otrzymamy więc

$$\rho' = \operatorname{div} \mathbf{E}, \tag{14}$$

zaś dla gęstości powierzchniowej

$$\eta' = (\mathbf{E}' - \mathbf{E})\nu. \tag{14a}$$

Podobnie też otrzymamy dla magnetyzmu pozornego gęstość przestrzenną

$$\varepsilon' = \operatorname{div} \mathbf{M} \tag{15}$$

i gęstość powierzchniową

$$\zeta' = (\mathbf{M}' - \mathbf{M})\nu, \tag{15a}$$

gdzie ν jest normalną do odpowiedniej powierzchni granicznej.

Wracając do elektryczności prawdziwej [wzory (12) i (12a)] i przypominając sobie, że $\mathbf{D} = K\mathbf{E}$, mamy dla ciała *izotropowego*, lecz niejednorodnego:

$$\rho = \operatorname{div} \mathbf{D} = K.\operatorname{div}\mathbf{E} + E_1 \frac{\partial K}{\partial x} + E_2 \frac{\partial K}{\partial y} + E_3 \frac{\partial K}{\partial z} =$$

$$K.\operatorname{div}\mathbf{E} + (\mathbf{E}\nabla)K$$

[patrz Wstęp, (105)], a więc według (14):

$$\rho = K\rho' + (\mathbf{E}\nabla)K; \tag{16}$$

zamiast (12a) możemy napisać, według (14a), dla granicy dwóch różnych ciał:

$$\eta = (K'\mathbf{E}' - K\mathbf{E})\nu = K'\eta' + (K' - K)\mathbf{E}\nu. \tag{16a}$$

Jeżeli więc ładunki prawdziwe znikają, t. j. $\rho = 0$, $\eta = 0$, mamy pomimo to pewne ładunki *pozorne*, o gęstościach:

$$\rho' = -\frac{1}{K}(\mathbf{E}\nabla)K, \text{ względnie } \eta' = \left(\frac{K}{K'} - 1\right)\mathbf{E}\nu. \tag{17}$$

Widzimy stąd, że (skoro tylko $E \neq 0$, względnie $\mathbf{E}\nu \neq 0$) ładunki pozorne znikają wraz z ładunkami prawdziwemi wówczas i *tylko* wówczas, gdy ciało jest elektrycznie *jednorodne*, względnie gdy spółczynniki stykających się ciał są równe, t. j. $K' = K$.

Jeżeli więc wprowadzimy np. bryłę szkła, pierwotnie nienaelektryzowaną, do pola elektrycznego w powietrzu, natenczas na po-

wierzchni jej będziemy mieli wogóle pewne rozmieszczenie elektryczności pozornej; dla szkła bowiem spółczynnik dielektryczny jest 5 do 7 razy większy niż dla powietrza.

Odwrotnie też może być $\rho' = 0$, $\eta' = 0$, a pomimo to $\rho \neq 0$, $\eta \neq 0$, co czytelnik sam łatwo wyrazić może słowami.

Tylko dla środowiska jednorodnego (izotropowego), a więc też dla próżni, rozmieszczeniu solenoidalnemu polaryzacyi towarzyszy rozmieszczenie solenoidalne siły elektrycznej.

Dla ciała *krystalicznego* mamy zresztą w ogóle, pisząc $\mathbf{D} = \mathbf{i}.K_1E_1 + \mathbf{j}.K_2E_2 + \mathbf{k}.K_3E_3$:

$$(18) \qquad \rho = \operatorname{div}\mathbf{D} = K_1\frac{\partial E_1}{\partial x} + K_2\frac{\partial E_2}{\partial y} + K_3\frac{\partial E_3}{\partial z} + E_1\frac{\partial K_1}{\partial x} + E_2\frac{\partial K_2}{\partial y} + E_3\frac{\partial K_3}{\partial z},$$

jeżeli zaś ciało to jest jednorodne:

$$(19) \qquad \rho = K_1\frac{\partial E_1}{\partial x} + K_2\frac{\partial E_2}{\partial y} + K_3\frac{\partial E_3}{\partial z}.$$

Dla *magnetyzmu pozornego* otrzymamy (uwzględniając, że magnetyzm prawdziwy znika wszędzie) wzory analogiczne do (17), t. j. dla gęstości przestrzennej ε' i powierzchniowej ζ':

$$(20) \qquad \varepsilon' = -\frac{1}{\mu}(\mathbf{M}\nabla)\mu, \quad \zeta' = \left(\frac{\mu}{\mu'} - 1\right)\mathbf{M}\nu.$$

W ciele więc jednorodnem i izotropowem będzie nietylko $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, ale też $\varepsilon' = div\,\mathbf{M} = 0$, na granicy zaś dwóch ciał o jednakowej przenikliwości magnetycznej będzie nietylko $(\mathbf{B}' - \mathbf{B})\nu = 0$, lecz również $\zeta' = (\mathbf{M}' - \mathbf{M})\nu = 0$.

W dalszym dopiero ciągu zobaczymy, jakie jest znaczenie formalne tych „pozornych“ (a także „prawdziwych“) ładunków elektrycznych i pozornych magnetyzmów, szczególniej dla pól statycznych. Wówczas też zrozumiemy, dlaczego posiadały one w dawniejszych teoryach pierwszorzędne niemal znaczenie.

§ 8. Jak wiadomo, istnieją liczne ciała, jak np. wszystkie metale, *nieprzenikliwe* dla linij siły elektrycznej w stanie równowagi. Innemi słowy: jeżeli jedno z takich ciał wprowadzimy do dowolnego pola elektrostatycznego, natenczas pole to odkształci się i przejdzie — po nadzwyczaj już krótkim przeciągu czasu — do nowego stanu równowagi, w którym cała przestrzeń wewnętrzna ograniczona zewnętrzną powierzchnią wprowadzonej bryły (t. j. nietylko jej substancya ale i ewentualne wydrążenia) jest *wolna od wszelkiego śladu siły elektrycznej*, sama zaś ta powierzchnia staje się siedliskiem początków i (tyluż) końców pewnej liczby rurek elek-

trycznych tworzących pole zewnętrzne. W dalszym ciągu zobaczymy, że linie siły elektrycznej urywają się na ciałach takich *normalnie* do ich powierzchni, a to od chwili, w której pole przybiera nowy stan równowagi. Ciała w taki zachowujące się sposób ochrzczono niezbyt trafną (jak zobaczymy) obrazą nazwą *„konduktorów“* czyli *„przewodników“ elektrycznych.*

Przez nazwę tę chciano wyrazić, że ciała takie „przewodzą“ to, co się nazywa „elektrycznością“, którą wyobrażano sobie jako pewnego rodzaju płyn nieważki, a której ruch miał stanowić t. zw. „prąd elektryczny przewodzony“; mówiono, że „przewodniki“ są ciałami stawiającemi temu „prądowi“ pewien „opór“ względnie mały, podczas gdy np. szkło, gutaperka i t. p. ciała, od czasu *Faraday'a* nazywające się *dielektrykami* a powszechniej i dawniej jeszcze *izolatorami*, miały prądowi temu stawiać opór olbrzymi. Nie brakło po temu oczywiście głębokich powodów związanych ściśle z faktycznym porządkiem historycznym odkryć poczynionych w dziedzinie zjawisk elektrycznych. Niestety, nie możemy zająć się tu przedmiotem tym, którego omówienie wymagałoby niepomiernie długich dygresyj.

Dla nas, aż dotąd, „elektryczność“ nie jest niczem innem, jak rozbieżnością pewnego wektora **D** (pomnożoną przez objętość) lub skokiem tegoż wektora (pomnożonym przez powierzchnię) na granicy dwóch różnych dielektryków; zaś „przewodniki“ są dla nas, według powyższego określenia, ciałami pozbawionemi linij elektrycznych, a więc też ładunków wewnętrznych, przynajmniej w polu statycznem. (Będę się czasami powoływał na to krótko jako na *określenie statyczne* przewodników elektrycznych.) Nie wolno więc nam, tymczasem przynajmniej, mówić ani o elektryczności w przewodniku, ani o jej ruchu lub „przepływaniu“ przez wnętrze takiego ciała. Możemy jednak zachować nazwę „przewodnik“, powszechnie przyjętą, pod warunkiem atoli, że będziemy rozumieli przez nią (aż do ewentualnych dalszych objaśnień) li tylko to, cośmy wyraźnie w nią włożyli przez nasze określenie statyczne. Do kwestyi tej wrócimy przy omawianiu ilościowem zmian czasowych pola elektrycznego, w związku z polem magnetycznem.

Na *powierzchni przewodnika*, np. bryłki miedzi lub innego metalu, wprowadzonego do pola elektrycznego, mamy więc po jednej stronie, w środowisku dielektrycznem, pewną składową $\mathbf{E}_\nu$ siły elektrycznej w ogóle różną od zera, po drugiej zaś stronie $\mathbf{E}'=0$, a więc też $\mathbf{E}'_\nu=0$. Składowa $\mathbf{E}_\nu$ siły elektrycznej, a więc też i polaryzacyi, podlega więc w każdym razie nieciągłości na powierzchni przewodnika.

Mamy więc dla gęstości *powierzchniowej* ładunku *prawdziwego*, według (12a):

(21) $$\eta = \mathbf{D}_\nu,$$

ładunku zaś *pozornego:*

$$(22) \qquad \eta' = \mathbf{E}\nu,$$

gdzie ν jest normalną *zewnętrzną* do powierzchni przewodnika.

Gęstości przestrzenne *wewnątrz* przewodnika znikają oczywiście, t. j. div $\mathbf{D}' = 0$, div $\mathbf{E}' = 0$, w stanie równowagi. Według określenia *statycznego* nie wolno nam zresztą mówić ani o spółczynniku dielektrycznym*) przewodnika, ani też więc o polaryzacyi w jego wnętrzu.

Wiadomo zresztą, z doświadczeń najelementarniejszych, że *suma algebraiczna* ładunków na powierzchni przewodnika pierwotnie nienaelektryzowanego, i wprowadzonego do dowolnego pola, *równa się zeru*, t. j. że ładunek jego *całkowity* nie podlega przez to wprowadzenie *żadnej zmianie*; zachodzi to zresztą *ogólnie*, t. j. nawet wówczas, gdy ładunek pierwotny przewodnika był różnym od zera.

Zauważmy wreszcie, że — o ile sądzić można ze wszystkich dotychczasowych doświadczeń — *„przewodniki" magnetyczne nie istnieją*. Ten brak analogii magnetycznej przewodnika elektrycznego stanowi jednę z najbardziej charakterystycznych różnic między zjawiskami jednego i drugiego rodzaju. Okoliczność ta jest zresztą zawarta w powyżej podanem twierdzeniu ogólnem o *solenoidalności* polaryzacyi magnetycznej; istotnie, gdyby istniały przewodniki magnetyczne, powierzchnie ich byłyby siedliskiem początków lub końców rurek polaryzacyi magnetycznej, wbrew temu twierdzeniu.

Przedmiot ten rozważymy później z innych jeszcze punktów widzenia.

§ 9. Dla wyrażenia spółzależności zjawisk elektrycznych i magnetycznych za pomocą równań różniczkowych —, które poznamy w następnym rozdziale, — potrzebne nam będą, oprócz powyższych, dwa inne jeszcze pojęcia zasadnicze, a mianowicie *prądu elektrycznego* i *prądu magnetycznego*.

Określenie. Prądem elektrycznym, względnie *magnetycznym, przez powierzchnię* σ pomyślaną w przestrzeni lub położoną przez zawsze te same cząstki poruszającego się ciała albo środowiska dielektrycznego, które jest doskonałym *izolatorem*, nazywam *zmianę indukcyi elektrycznej, względnie magnetycznej* przez tę powierzchnię, *obliczoną na jednostkę czasu*, czyli krócej: *prędkość zmiany* jednej lub drugiej indukcyi, t. j. całek $\int \mathbf{D}\nu d\sigma$, $\int \mathbf{B}\nu d\sigma$.

Uwaga. Zawarte w spólnem określeniu tem pojęcie prądu *magnetycznego* pozostanie też *bez wszelkiej zmiany* dla ciał nieizo-

*) chyba że zgodzilibyśmy się przypisać mu wartość ∞.

lujących czyli „przewodzących elektrycznie“, podczas gdy pojęcie prądu elektrycznego wymaga dla ciał takich pewnego jeszcze uzupełnienia, które wprowadzimy w następnym paragrafie.

Rozważmy przedewszystkiem powierzchnię *nieruchomą*; niechaj $d\sigma$ będzie jej elementem; natenczas, oznaczając przez $\frac{\partial}{\partial t}$ prędkość zmiany *lokalnej*, otrzymamy dla *prądu przez* $d\sigma$:

$$\nu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\sigma, \text{ względnie } \nu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\sigma,$$

czyli na *jednostkę powierzchni*:

$$\nu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \text{ względnie } \nu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Obierając element $d\sigma$, w danem miejscu pola, *tak*, aby jego normalna ν była równoległą do wektora $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, otrzymalibyśmy, *caeteris paribus*, maximum prądu przez $d\sigma$, a mianowicie $\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right).d\sigma$, t. j. na jednostkę powierzchni: $\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)$. Wektor więc $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ będzie prądem *wypadkowym* na jednostkę powierzchni, co do natężenia i kierunku. Otóż prąd wypadkowy na jednostkę powierzchni będę krótko nazywał *prądem*, w danem miejscu. Oznaczając tak określony prąd elektryczny przez $\mathbf{p}$, zaś magnetyczny przez $\mathbf{q}$, mamy dla próżni lub dowolnego izolatora nieruchomego:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{23}$$

Całka powierzchniowa tych wyrazów da nam prąd całkowity przez odpowiednią powierzchnię nieruchomą.

Niechaj teraz środowisko dielektryczne będzie *ruchome* i niechaj $d\sigma$ będzie elementem powierzchni utworzonym przez indywidualnie zawsze te same cząstki środowiska. Prędkość ruchu dowolnej cząstki niechaj będzie dana przez wektor $\mathbf{v}$, który wogóle zmienia się w sposób ciągły od punktu do punktu, tak iż $d\sigma$ porusza się i odkształca w pewien sposób. Jaki jest wyraz prądu elektrycznego przez $d\sigma$ w terminach wektorów $\mathbf{D}$ i $\mathbf{v}$?

Aby na to odpowiedzieć, uciekniemy się do układu spółrzędnych prostokątnych nieruchomych x, y, z (t. j. do układu, do któ-

rego odnosimy prędkości ruchu $\mathbf{v}$), od którego jednak uwolnimy się w końcu rachunku.

Oznaczmy składowe względem osi x, y, z przez wskaźniki 1, 2, 3, t, j. napiszmy $\mathbf{D} = \mathbf{i}D_1 + \mathbf{j}D_2 + \mathbf{k}D_3$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}v_1 + \mathbf{j}v_2 + \mathbf{k}v_3$, i weźmy nasamprzód jako „$d\sigma$“ element prostokątny $dy.dz$, t. j. prostokątny w *danej chwili* t. i w tejże chwili równoległy do płaszczyzny yz. W chwili tej indukcya elektryczna przez $dy.dz$ jest oczywiście

$$dy.dz.D_1.$$

W chwili $t+dt$ indukcya przez element złożony zawsze z tych samych cząsteczek będzie miała w ogóle wartość odmienną; zmiana indukcyi zachodzi dzięki trzem okolicznościom:

1) przez zmianę lokalną składowej D_1,
2) „ ruch postępowy elementu powierzchni,
3) „ odkształcenie, dylatacyę i obrót tego elementu.

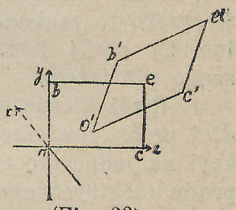
Zmiana zachodząca dzięki 1) jest poprostu

$$\frac{\partial D_1}{\partial t}\, dt.dy.dz.$$

Dzięki samemu przesunięciu postępowemu 2), t. j. $\mathbf{v}.dt$, mielibyśmy zmianę indukcyi

$$dt.dydz.(\mathbf{v}\nabla)\, D_1 = dt.dy.dz\ (v_1 \frac{\partial D_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial D_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial D_1}{\partial z}).$$

Aby obliczyć zmianę indukcyi odpowiadającą obrotowi i odkształceniu (łącznie z dylatacyą) rozważanego elementu, uwzględnijmy, że (dla środowiska ciągłego, poruszającego i odkształcającego się w sposób ciągły) prostokąt elementarny przekształca się wciągu dt na *równoległobok* elementarny, wogóle skośny i nierównoległy do swego położenia pierwotnego. Niechaj *Obec* (Fig. 33) będzie naszym elementem w chwili t, zaś $O'b'e'c'$ — tymże elementem w chwili $t+dt$. Obierając O jako początek układu, mamy dla spółrzędnych punktów b, c:



(Fig. 33).

b) o, dy, o
c) o, o, dz,

zaś dla b', c':

$$b') \quad \frac{\partial v_1}{\partial y}\, dydt,\ dy + \frac{\partial v_2}{dy}\, dydt,\ \frac{\partial v_3}{\partial y}\, dydt$$

$$c') \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} dzdt, \frac{\partial v_2}{\partial z} dzdt, dz + \frac{\partial v_3}{\partial z} dzdt;$$

spółrzędne te oznaczmy krótko przez b'_1, b'_2, b'_3, c'_1, c'_2, c'_3; wówczas pola rzutów równoległoboka $O'b'e'c'$ na płaszczyzny yz, zx, xy będą:

$$d\sigma'_1 = b'_2c'_3 - b'_3c'_2, \; d\sigma'_2 = b'_3c'_1 - b'_1c'_3, \; d\sigma'_3 = b'_1c'_2 - b'_2c'_1;$$

podstawiając zaś za b'_1 i t. d. powyższe wartości i zaniedbując wyrazy nieskończenie małe rzędu wyższego niż $dy.dz.dt$, otrzymamy:

$$d\sigma'_1 = (1 + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}) dy.dz.dt,$$

$$d\sigma'_2 = - \frac{\partial v_1}{\partial y} dy.dz.dt,$$

$$d\sigma'_3 = - \frac{\partial v_1}{\partial z} dy.dz.dt.$$

Ponieważ indukcya przez element powierzchni $O'b'e'c'$ jest $D_1.d\sigma'_1 + D_2.d\sigma'_2 + D_3.d\sigma'_3$, indukcya zaś przez *Obec* równa się $D_1 dy.dz$, przeto dla zmiany indukcyi zachodzącej dzięki 3) otrzymamy wyraz

$$D_1 d\sigma'_1 + D_2 d\sigma'_2 + D_3 d\sigma'_3 - D_1 dy.dz =$$

$$= \left\{ D_1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) - D_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - D_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right\} dydz.dt.$$

Zmianę *całkowitą* indukcyi możemy uważać jako superpozycyę zmian odpowiadających okolicznościom 1), 2), 3); w rzeczywistości wszystko to zachodzi równocześnie, lecz kombinując np. 1) z 2), lub 2) z 3) i t. d., otrzymalibyśmy tylko wyrazy rzędu wyższego niż trzeci.

Owóż biorąc sumę trzech powyższych zmian i dzieląc ją przez dt i przez powierzchnię $dy.dz$. otrzymamy zmianę całkowitą indukcyi na jednostkę czasu i na jednostkę powierzchni, t. j. składową prądu elektrycznego prostopadłą do yz, czyli równoległą do osi x-ów:

$$p_1 = \frac{\partial D_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial D_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial D_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial D_1}{\partial z}$$

$$+ D_1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) - D_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - D_3 \frac{\partial v_1}{\partial z},$$

czyli — dodając i odejmując $v_1 \left(\frac{\partial D_2}{\partial y} + \frac{\partial D_3}{\partial z} \right)$:

$$p_1 = \frac{\partial D_1}{\partial t} + v_1 \cdot \operatorname{div} \mathbf{D} + \frac{\partial}{\partial y}(v_2 D_1 - v_1 D_2) - \frac{\partial}{\partial z}(v_1 D_3 - v_3 D_1).$$

Rozważając elementy prostokątne równoległe do płaszczyzny *zx*, względnie *xy*, otrzymalibyśmy analogiczne wyrazy dla składowych prądu p_2, p_3 równoległych do osi *Oy*, *Oz*.

Prąd elektryczny wypadkowy dla izolatora ruchomego możemy więc napisać wektorowo [według wzorów (8) i (88) Wstępu]:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{curl} \mathrm{V}\mathbf{D}\mathbf{v}. \tag{24}$$

Możemy zresztą napisać dla *jakiegokolwiek* pola wektorowego **R**, roztaczającego się w ruchomem środowisku:

$$\text{prąd}\,(\mathbf{R}) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{R} + \operatorname{curl} \mathrm{V}\mathbf{R}\mathbf{v}.$$

Dla *prądu magnetycznego w dowolnem środowisku ruchomem* otrzymamy wyraz uproszczony:

$$\mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{curl} \mathrm{V}\mathbf{B}\mathbf{v}, \tag{25}$$

albowiem $div\ \mathbf{B} = 0$.

$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ nazywa się *prądem przesunięcia elektrycznego* *), zaś

$\mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{D} = \mathbf{v} \cdot \rho$ — *prądem konwekcyjnym*, — odpowiada on bowiem *przenoszeniu* się ładunków elektrycznych (prawdziwych) *wraz z materyą*; trzecią część prądu, t. j. wektor *curl* $\mathrm{V}\mathbf{D}\mathbf{v}$, którego znaczenie fizyczne poznamy w następnym rozdziale, nazywają niektórzy fizycy *prądem Röntgena*. (gdyż pomer może był studyowany)

Dla jednej i drugiej części prądu magnetycznego nie wprowadzimy tu żadnych nazw.

Rozmieszczenie *prądu magnetycznego* jest zawsze i wszędzie *solenoidalne*, t. j.

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \tag{26}$$

---

*) *Displacement-current*, według *Maxwella*, który nazywa wektor **D**, a raczej — przy użyciu innych jednostek — $\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}$ *przesunięciem* (displacement). Porówn. *Treatise on Electricity and Magnetism*, Tom I, koniec Rozdz. I-go i Rozdz. II., art. 68.

Istotnie, ponieważ $div\ curl = 0$, mamy $div\ \mathbf{q} = div \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} div\ \mathbf{B} = 0$.

Dla prądu *elektrycznego* w ruchomym *izolatorze* mamy, według (24) i oznaczając *div* **D**, czyli gęstość ładunku prawdziwego przez ρ (jak dotychczas):

$$\text{div}\ \mathbf{p} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\ \text{div}\ \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\,\rho,$$

t. j. [patrz Wstęp, wzór (106)]:

$$\text{div}\ \mathbf{p} = \frac{d\rho}{dt} + \rho.\text{div}\ \mathbf{v},$$

gdzie $\frac{d\rho}{dt}$ (dla odróżnienia od zmiany lokalnej $\frac{\partial \rho}{\partial t}$) oznacza zmianę gęstości ładunku prawdziwego *w elemencie indywidualnym* $d\tau$ *izolatora* podczas jego ruchu i odkształcenia, zaś $div\ \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$ wyraża (jak wiadomo) dylatacyę tegoż elementu, na jednostkę czasu i na jednostkę objętości; suma więc $\frac{d\rho}{dt}\, d\tau + \rho.div\ \mathbf{v}.d\tau$ wyraża przyrost ładunku elektrycznego zawartego w elemencie $d\tau$ (na jednostkę czasu), t. j. $\frac{d}{dt}(\rho.d\tau)$; mamy więc

$$\text{(27)} \qquad \text{div}\ \mathbf{p}\ .\ d\tau = \frac{d}{dt}(\rho.d\tau),$$

wzór nadający się dobrze do interpretacyi fizycznej. Skorzystamy zeń w dalszym ciągu, gdy zobaczymy mianowicie, że *div* **p** znika zawsze i wszędzie na podstawie jednego z (dwojga) równań różniczkowych zasadniczych zmiennego pola elektromagnetycznego. Innemi słowy, zobaczymy, że prąd elektryczny *staje się solenoidalnym* na podstawie owego równania, *pomimo* że wektor **D** nie jest solenoidalnym, podczas gdy prąd magnetyczny jest dla nas teraz już solenoidalnym, ponieważ założyliśmy (zgodnie z doświadczeniem), że polaryzacya magnetyczna **B** jest solenoidalną.

§ 10. W poprzednim paragrafie określiliśmy pojęcie prądu magnetycznego dla dowolnych ciał, zaś pojęcie prądu elektrycznego jedynie tylko dla doskonałych izolatorów. Obecnie uzupełnimy dru-

gie z tych pojęć dla innych ciał, t. j. dla t. zw. „dobrych lub złych przewodników“.

Mówiliśmy już w § 8 krótko o „przewodnikach“, określając je atoli w sposób czysto *statyczny* jako ciała pozbawione wszelkiego śladu siły elektrycznej. Otóż, gdybyśmy chcieli rozciągnąć stosowalność tego określenia pierwotnego nietylko do pól elektro*statycznych*, lecz do wszelkich innych, a więc też w ogóle zmiennych w czasie, natenczas nie moglibyśmy oczywiście stosować do wnętrza tak określonych ciał ani pojęcia siły lub polaryzacyi, ani też prądu elektrycznego.

Musimy więc przedewszystkiem zmodyfikować owo określenie statyczne, rozważając sprawę z szerszego nieco punktu widzenia.

Wiadomo z doświadczenia, że w pewnych ciałach, jak gazy przy zwykłych warunkach, szkło, gutaperka i t. d., pole elektryczne (mianowicie irotacyjne) może trwać dowolnie długo, a przynajmniej bardzo długo, bez żadnych widocznych zmian i bez żadnych zzewnątrz doprowadzanych zasiłków energii; ciała takie lub środowiska nazywają się powszechnie *dobremi izolatorami* albo krótko *izolatorami*. W innych zaś ciałach, czyli w tak zwanych *złych izolatorach*, pole elektryczne może trwać niezmiennie li tylko przy ustawicznem doprowadzaniu energii z zewnątrz; jeżeli zaś tego nie uczynimy, czyli pozostawimy pole samemu sobie, natenczas zacznie się ono osłabiać stopniowo i po upływie mniej lub więcej krótkiego czasu stanie się zupełnie niedostrzegalnem; odpowiadająca zaś polu temu energia rozprasza się t. j. zamienia się na ciepło. Im prędzej odbywa się ten proces, o tem *gorszych* mówimy izolatorach. Posuwając się w kierunku od najlepszych do coraz to gorszych izolatorów dochodzimy stopniowo do tak zwanych *złych przewodników* (jak pary i wodne rostwory *). Otóż wszystkie ciała tego rodzaju, dla których zresztą może być mowa jeszcze o spółczynniku dielektrycznym K jako wielkości dającej się zmierzyć, nazywamy *dielektrykami przewodzącemi* lub *półprzewodnikami*.

Zauważmy, że każde z tych ciał w ostatecznym stanie równowagi elektrycznej otoczenia będzie pozbawione wszelkiego śladu siły elektrycznej, a więc będzie zgodne z „przewodnikiem“ naszym z § 8-go, określonym statycznie.

Do wnętrza jednak półprzewodników dopiero co określonych *możemy* stosować pojęcie siły i polaryzacyi elektrycznej, zarówno jak i prądu elektrycznego, który obecnie właśnie mamy uzupełnić.

Idąc wprawdzie coraz dalej w zaznaczonym kierunku, przechodzimy do tak zwanych *dobrych przewodników*, jak metale, dla

---

*) Dla których atoli pomijam tu charakter *elektrolityczny* „przewodzenia“.

wnętrza których nikt nie myśli nawet o skonstatowaniu istnienia siły elektrycznej lub o mierzeniu K; lecz ponieważ przejście od jednego do drugiego ogniwa całego tego łańcucha ciał odbywa się bądź co bądź bez zasadniczych przeskoków, przeto możemy i dobre przewodniki podciągnąć pod tę samą kategoryę ogólną *półprzewodników*.

Możemy zresztą upatrywać granic wszystkich półprzewodników z *jednej strony* w *doskonałym izolatorze*, t. j. w ideale, do którego np. gazy w zwykłych warunkach zbliżają się już bardzo, z *drugiej zaś strony* w *doskonałym przewodniku*, t. j. w ciele idealnem, które *w ogóle* byłoby nieprzenikliwe dla linij siły elektrycznej, w polu statycznem lub zmiennem; do ideału tego zbliżają się metale przy malejącej temperatnrze coraz bardziej. Doskonałą „próżnię“ wyobrażają sobie zresztą wszyscy teoretycy jako izolator doskonały, t. j. jako środowisko, w którem pole elektryczne mogłoby istnieć dowolnie długo (czyli — jak się mówi — nieskończenie długo) bez żadnej zmiany.

Otóż dla półprzewodników jakichkolwiek nazwiemy *prądem elektrycznym (całkowitym)* wektor „$\mathfrak{p}$“ określony w § 9 *więcej* wektor $\lambda\mathfrak{E}$, gdzie $\mathfrak{E}$ jest *siłą* elektryczną w danym punkcie ciała, zaś λ pewnym spółczynnikiem przysługującym danemu półprzewodnikowi, który (za powszechnym idąc przykładem) nazwiemy *spółczynnikiem przewodnictwa*, nie kojarząc jednak z brzmieniem tej nazwy żadnych obrazów fizycznych. Według tego określenia napiszemy więc dla prądu elektrycznego w *półprzewodniku nieruchomym* [zamiast (23)]:

$$\mathfrak{p} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \lambda\mathfrak{E}, \tag{28}$$

zaś w *poruszającym się* [zamiast (24)]:

$$\mathfrak{p} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{v}.\operatorname{div} D + \lambda\mathfrak{E} + \operatorname{curl} V\mathfrak{D}\mathfrak{v}. \tag{29}$$

Część $\lambda\mathfrak{E}$ całego prądu nazywa się zwykle *prądem przewodzonym* (conduction-current).

Właściwe znaczenie fizyczne spółczynnika λ poznamy w dalszym dopiero ciągu, gdy już mianowicie wyrazimy za pomocą $\mathfrak{p}$ (i $\mathfrak{q}$) zasadnicze prawa pola zmiennego.

Obecnie zaś ograniczymy się tylko do uwagi, że λ dla ciał krystalicznych jest *liniowym operatorem wektorowym* o pewnych osiach głównych, zaś dla ciał *izotropowych* — zwykłym *skalarem*, którego wartość liczebna jest np. dla żelaza 6 razy mniejsza niż dla miedzi, dla ołowiu 12 razy, dla rtęci 60, zaś dla różnych gatunków gutaperki używanych w telegrafii podmorskiej 10^{12} razy mniejsza niż dla miedzi, dla wszystkich zresztą metali maleje przy

rosnącej temperaturze. Co do metod mierzenia λ, należy wyobrazić sobie, że uzasadnienie ich opiera się na pewnych wnioskach dających się wysnuć z ogólnych równań różniczkowych pola, które później dopiero poznamy. Podobne koleje przechodzą zresztą, w każdej niemal dziedzinie fizyki i nauk pokrewnych, pojęcia pierwotnie surowe, że tak powiem — jakościowe, które później dopiero nabierają charakteru pojęć ilościowych; a dzieje się to przy pomocy praw lub prawideł wyrażonych pierwotnie w terminach owego właśnie pojęcia surowego.

Lecz przed poznaniem jeszcze owych równań pola zmiennego, i nie uciekając się do żadnych zresztą hypotez, możemy przecież powiedzieć tu coś jeszcze o spółczynniku λ, a raczej o stosunku jego do spółczynnika dielektrycznego K. Możemy mianowicie powiedzieć, jakiego *rodzaju* wielkością fizyczną jest λ lub K/λ, t. j. jakie są jej *wymiary*, a to na zasadzie samego już sposobu, w jaki zestawiliśmy tę wielkość z innemi wielkościami w równaniu (28).

Istotnie, oznaczając wymiary dowolnej wielkości przez [ ], możemy przedewszystkiem, według (28), napisać:

$$[\lambda E] = \left[\frac{\partial D}{\partial t}\right] = [Dt^{-1}].$$

Według powyższego określenia spółczynnika K, czyli w tak zw. układzie miar *elektrostatycznym*, K — jako stosunek dwóch sił po jednej i drugiej stronie powierzchni granicznej — jest liczbą *niemianowaną* *), tak iż w tymże układzie byłoby $[D] = [KE] = [E]$. Dla zachowania jednak możliwej ogólności, t. j. aby nie wykluczyć innych układów miar, pozostawmy ten spółczynnik w obecnym wzorze, oznaczając jego wymiary wogóle przez [K]. Otrzymamy wówczas $[\lambda E] = [KEt^{-1}]$, czyli

$$\left[\frac{K}{\lambda}\right] = [t]. \tag{30}$$

Stosunek więc *spółczynnika dielektrycznego do spółczynnika przewodnictwa* dla dowolnego ciała jest *pewnym czasem*.

Jakim mianowicie czasem, tego oczywiście z (28) odczytać nie można. Zobaczymy atoli w następnym rozdziale, że K/λ jest to czas, w ciągu którego natężenie pola elektrycznego (irotacyjnego) w każdym punkcie półprzewodnika spada do $\frac{1}{e}$-tej swej wartości pierwotnej (gdzie e oznacza zasadę logarytmów naturalnych).

*) Podobnie jak μ, według naszego określenia, t. j. w tak zwanym układzie *magnetycznym* miar.

Stąd widzimy też, że jeżeli nawet K i λ dla danego ciała A określono jako „stałe *gatunkowe*“ *(specyficzne)*, t. j. w porównaniu czyli zestawieniu z innem jakiemś ciałem lub środowiskiem A_0, obranem konwencyonalnie, — stosunek K/λ pomimo to będzie pewną „stałą *wewnętrzną*“ ciała A, t. j. dającą się zmierzyć na samem ciele A, bez porównywania z jakiemkolwiek ciałem wzorcowem A_0, i niezależną od wyboru jednostek wielkości elektromagnetycznych.

We wzorach (28), (29) mamy tedy prąd elektryczny uzupełniony już dla pół-przewodników.

Co się tyczy prądu *magnetycznego*, powiedzieliśmy już w § 9, że dane tam określenie nie wymaga żadnego uzupełnienia. Istotnie analogia magnetyczna „przewodnictwa“ elektrycznego a więc też spółczynnika λ, *nie istnieje*. Innemi słowy: nie znamy aż dotąd z ogółu wszystkich doświadczeń ani jednego ciała lub środowiska, w którem pole magnetyczne nie mogłoby istnieć dowolnie długo bez rozpraszania i bez wszelkich zewnętrznych zasiłków energii.

prąd [illegible] + prąd [illegible] + prąd [illegible] + prąd Rowlanda

$$\bar{p} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \lambda \bar{E} + \bar{v}\, \mathrm{div}\, \bar{D} + \mathrm{curl}\left[\bar{D}\,\bar{v}\right]$$

$$\bar{q} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \mathrm{curl}\left[\bar{B}, \bar{v}\right]$$

ROZDZIAŁ II.

Maxwellowskie równania różniczkowe pola elektromagnetycznego.

Rozdział II.

Maxwellowskie równania różniczkowe pola elektromagnetycznego.

§ 11. W poprzednim rozdziale podaliśmy szereg określeń pewnych pojęć zasadniczych i odpowiednich wielkości, wektorowych lub skalarnych, nie wnikając jeszcze w ogólne prawa zjawisk elektromagnetycznych. Istotnie, oprócz nielicznych elementów zaczerpniętych z doświadczenia, jak np. nieistnienie „przewodników magnetycznych“ i solenoidalność polaryzacyi magnetycznej, Rozdział I zawierał właściwie tylko objaśnienie pewnych wyrazów i symbolów, któremi wypadnie nam posługiwać się w niniejszej książce. Wzory nasze, jak np. (12), (12a), (23), (24) i t. d., nie były więc właściwie równaniami czyli związkami o pewnej treści fizycznej, lecz zawierały poprostu po prawej stronie objaśnienia symbolów (ρ, η, $\mathfrak{p}$ i t. d.) stojących po lewej stronie.

Obecnie dopiero, z pomocą owych pojęć i symbolów, będziemy mogli wyrazić krótko i w kształcie łatwym do spamiętania, pewne ogólne związki elektromagnetyczne i napisać równania posiadające zasadnicze znaczenie i treść fizyczną.

Zasadnicze te prawa czyli związki i odpowiednie równania będę krótko nazywał *Maxwell'owskiemi*, aczkolwiek miały one (a przynajmniej *jedno* z nich) w klasycznych dziełach *Maxwella* *) kształt nieco odmienny, a mianowicie wyraz mniej bezpośredni, i nie posiadały jeszcze pewnych uzupełnień (szczególniej dla ciał

---

*) *James Clerk Maxwell: On Faraday's lines of force* (1855—56), *On physical lines of force* (1861—62), *A dynamical theory of the elmgnt. field* (1865) — przedrukowane w *Scientific Papers*, t. I. *A treatise on Electricity and Magnetism*, dwa tomy; Oxford, wyd. pierwsze —1873, drugie — 1881, trzecie — 1892.

ruchomych) dodanych później przez *Hertza* i *Heaviside'a* **). Równania różniczkowe, które mamy tu na myśli, noszą powszechnie nazwę równań *Hertza — Heaviside'a*; zawarte w nich zresztą elementy reformatorskie leżą niewątpliwie w duchu pierwotnej teoryi Maxwella.

Nie wnikając zresztą ani w historyę powstania i rozwoju ani też w rozliczne próby przedwstępnego „wyprowadzenia“ czyli uzasadnienia tych równań przez różnych autorów, możemy wyrazić treść ich w postaci następujących dwóch praw:

I. *Prąd elektryczny przez powierzchnię* σ *jest proporcyonalny do siły magnetomotorycznej wziętej w kierunku dodatnim wzdłuż linii* s *ograniczającej tę powierzchnię:*

$$\int \mathfrak{p}_\nu . d\sigma \infty \oint \mathfrak{M} ds.$$

II. *Prąd magnetyczny przez powierzchnię* σ *jest proporcyonalny do siły elektromotorycznej wziętej wzdłuż ograniczającej ją linii* s *w kierunku ujemnym:*

$$- \int \mathfrak{q}_\nu . ds \infty \oint \mathfrak{E} ds.$$

Przez *kierunek dodatni* obwodu s rozumiemy ten, w którym poruszałyby się końce wskazówek zegara dla widza patrzącego w kierunku normalnej ν.

Spółczynnik proporcyonalności jest w I i II *dodatni*; jeżeli mierzymy $\mathfrak{E}$ w I i II *temi samemi jednostkami* i $\mathfrak{M}$ w I i II *temi samemi jednostkami* (lecz zresztą dowolnemi i w ogóle różnemi dla $\mathfrak{E}$ i $\mathfrak{M}$), *natenczas spółczynnik ten posiada w jednem i drugiem prawie tę samą wartość liczebną i zachowuje tę wartość dla wszelkich środowisk.*

Uwaga. Prawa te mają zachodzić dla każdej chwili t i dla każdej dziedziny dowolnego pola elektromagnetycznego, z wyjątkiem atoli tych miejsc, które są siedliskami „źródeł energii“ i w których działają tak zwane „siły przyłożone“; pojęcia te i odpowiednie modyfikacye powyższych praw poznamy później. Tymczasem zaś będziemy opierać się stale na założeniu, że miejsca takie są z rozważanych przez nas pól wykluczone.

**) *Heinrich Hertz: Untersuchungen üb. die Ausbreitung der elektrischen Kraft* (Lipsk 1892), gdzie czytelnik znajdzie przedruk wszystkich dotyczących prac tego autora. *Oliver Heaviside: Electrical Papers*, dwa tomy (Londyn 1892), *Electromagnetic Theory*, dwa tomy (Londyn 1893, 1899), przedruk rozpraw i artykułów.

Prawa I i II mają stosować się, w myśl teoryi *Maxwella*, zarówno *do izolatorów jak i do półprzewodników* (wraz z dobremi przewodnikami), w myśl zaś uzupełnień *Hertza* i *Heaviside'a* — nietylko do ciał nieruchomych, lecz również do ciał lub środowisk *odkształcających i poruszających się*, dla których wówczas powierzchnia σ ma być utworzona *zawsze z tych samych cząstek materyalnych*, t. j. prądy $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ mają być wektorami określonemi przez wzory (29), § 10, i (25), § 9.

Należy jednak na samym już wstępie zauważyć, że prawa te czyli odpowiednie równania zgadzają się bardzo dobrze z doświadczeniem i obejmują bardzo obszerne grupy zjawisk elektromagnetycznych w środowiskach *spoczywających* (aczkolwiek nie wszystkie), podczas gdy dla środowisk *ruchomych* są w jaskrawej sprzeczności z najbardziej niemal zasadniczemi cechami roschodzenia się fal elektromagnetycznych w szybko poruszających się ciałach, szczególniej gdy chodzi o owe fale (nader krótkie), które stanowią światło i t. p. promieniowania. Tak np. zjawiska aberacyi odbywają się zupełnie inaczej, niż wymagałyby tego powyższe prawa w zastosowaniu do ciał ruchomych. Pomimo to rozważenie ich w tem miejscu w całej ogólności, t. j. zarówno dla środowisk spoczywających jako też dla ruchomych, nie będzie bez korzyści dla czytelnika. Wrócimy zresztą do tego przedmiotu później, omawiając teoryę elektromagnetyczną światła. Wówczas też poznamy inne, zbudowane przez nowszych fizyków, równania, które ze zjawisk w ciałach ruchomych lepiej zdają sprawę. Zobaczymy zresztą, że — gdy chodzi o szybkie drgania elektromagnetyczne — związki I i II (a szczególniej pierwszy) wymagają zasadniczej przeróbki nawet dla ciał spoczywających, szczególniej zaś dla dielektryków o dostrzegalnej zdolności pochłaniania fal, czyli niezupełnie przezroczystych. (Zaznaczmy jeszcze, że dla samej „*próżni*“ żaden aż dotąd badacz w najściślejszą stosowalność związków I i II nie wątpi.)

Odkładając więc rozważenie wszelkich nowszych przeróbek do ostatnich rozdziałów tej książki, postaramy się przedewszystkiem wysnuć z powyższych związków, wziętych najogólniej, cały szereg wniosków czyli twierdzeń szczególnych elektromagnetycznych, względnie elektro- lub magneto-statycznych.

W tym celu wyraźmy je nasamprzód w postaci równań różniczkowych (a te właśnie równania nauka zawdzięcza *Hertz*'owi i *Heaviside*'owi, którzy wyrazili je: pierwszy skalarnie, drugi wewektorowo).

Oznaczając przez c spółczynnik proporcyonalności, wspólny prawom I i II, możemy je napisać

$$(31)\qquad \frac{1}{c}\int \mathbf{p}\nu\,d\sigma = \oint \mathbf{M}\,ds,\quad \frac{1}{c}\int \mathbf{q}\nu\,d\sigma = -\oint \mathbf{E}\,ds,$$

czyli, według twierdzenia Stokes'a:

$$\int\left[\frac{1}{c}\mathbf{p} - \operatorname{curl}\mathbf{M}\right]\nu.d\sigma = 0, \qquad \int\left[\frac{1}{c}\mathbf{q} + \operatorname{curl}\mathbf{E}\right]\nu.d\sigma = 0.$$

Każde z tych równań ma zachodzić dla dowolnych powierzchni σ, a więc też dla dowolnych kierunków normalnej ν do poszczególnych elementów $d\sigma$; wyrazy więc zawarte w nawiasach muszą znikać dla każdego z osobna elementu $d\sigma$. Mamy więc, dla każdego punktu pola i dla każdej chwili, dwa równania:

(A) $$\frac{1}{c}\mathbf{p} = \operatorname{curl}\mathbf{M}$$

(B) $$\frac{1}{c}\mathbf{q} = -\operatorname{curl}\mathbf{E}.$$

Wystarcza podstawić w nich za prądy $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ wyrazy podane w §§ 9 i 10, aby zobaczyć, że są to równania różniczkowe (cząstkowe) dla sił $\mathbf{E}$, $\mathbf{M}$ (przy danych K, μ, λ, $\mathbf{v}$) rzędu 1-go względem czasu. Zanim to jednak uczynimy, zatrzymajmy się jeszcze nieco na tych właśnie krótkich wyrazach powyższych dwóch praw:

Możemy je natychmiast tak przeczytać:

(A) Rurki *prądu elektrycznego* zlewają się zupełnie *z wirami magnetycznemi.*

(B) Rurki *prądu magnetycznego* zlewają się *z wirami elektrycznemi*, lecz biegną w kierunkach wręcz *przeciwnych.*

Z pominięciem spółczynnika stałego c, *momenty* rurek prądu el. lub mgnt. są te same jak dla zlewających się z niemi wirów mgnt., względnie el.; stąd już widzimy, że rurki prądu jednego i drugiego rodzaju są *solenoidalne.*

Zresztą, ponieważ *div curl* $= 0$, dla *dowolnego* wektora, przeto mamy wprost z wzorów (A), (B):

(32) $$\operatorname{div}\mathbf{q} = 0$$

(33) $$\operatorname{div}\mathbf{p} = 0.$$

Pierwsze z tych równań było już zresztą wynikiem założenia solenoidalności polaryzacyi magnetycznej (§ 9); drugie natomiast jest wynikiem z prawa I, a raczej towarzyszy nieodłącznie temu prawu.

W myśl więc teoryi Maxwella (nietylko prąd magnetyczny lecz również) *prąd elektryczny jest zawsze solenoidalny, czyli zam-*

knięty w sobie *); dla ścisłości należy dodać: prąd *całkowity*, t. j. *suma wektorowa prądu przesunięcia, prądu konwekcyjnego i prądu przewodzonego.* Stanowi to nawet jednę z najwybitniejszych cech teoryi Maxwella.

Do sumy tej nie mamy zresztą potrzeby dodawać czwartego jeszcze wektora *curl* V**Dv** [patrz (29)]; ten bowiem jest sam już identycznie solenoidalnym; dla tego też możemy go nawet w ogóle nie zaliczać do prądu, czyli odtrącić go, jak to w powszechnym jest zwyczaju.

Zauważę jeszcze, że wzór (A), czyli — dla rurki o przekroju skończonym — pierwszy z wzorów (31) stał się właściwie praktycznem określeniem „całkowitego“ prądu elektrycznego.

Po tych uwagach wróćmy do wzorów (A), (B), aby podstawić w nich za **p**, **q** wyrazy rozwinięte w §§ 9 i 10.

§ 12. Zacznijmy od wypadku najprostszego, a mianowicie od *izolatora doskonałego, nieruchomego.*

Dla takiego środowiska otrzymamy, według (23), jako wyraz różniczkowy praw I i II, równania:

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathbf{M}$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{curl} \mathbf{E}.$$

W założeniu, że dane są dla rozważanego środowiska spółczynniki, względnie operatory wektorowe liniowe K i μ, tak iż $\mathbf{D} = K\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{M}$, mamy w (I) i (II) *dwa* równania różniczkowe cząstkowe, I-go rzędu ze względu na t, dla *dwóch wektorów* **E**, **M** zmiennych w czasie i przestrzeni.

Przy danych więc $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ dla dowolnej chwili „początkowej“ $t = t_0$ *dla całej przestrzeni*, ewentualnie zaś przy danych oprócz tego **E**, **M** dla *granicy* pola dla wszelkich t, *cały przebieg* zjawisk elektromagnetycznych w tej przestrzeni będzie *jednoznacznie określony* na podstawie układu równań (I) i (II).

Dla tego też powiemy, że **E**, **M** (wraz z K i μ) określają zupełnie *stan chwilowy* lub krótko *stan* pola elektromagnetycznego w danem środowisku, podobnie np. jak konfiguracya i prędkości określają stan układu mechanicznego.

Dla ścisłości należy dodać, że przez dane chwilowe $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{M}_0$ określony jest przebieg zjawisk dla całej *epoki* czasu, w której mianowicie ważne są owe równania i w której ani **E** ani **M** nie

*) Skoro uważamy prąd biegnący obustronnie w nieskończoność jako wypadek graniczny.

doznają skoków czyli są *ciągłe* ze względu na czas t, co do natężenia i kierunku.

Istotnie też założymy *raz na zawsze*, że $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, a więc też $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, są *ciągłe w czasie*, czyli że natężenia wektorów $\dot{\mathfrak{E}} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$, $\dot{\mathfrak{M}}$, $\dot{\mathfrak{D}}$, $\dot{\mathfrak{B}}$ nie osiągają nigdy i nigdzie nieskończenie wielkich wartości.

Do sprawy jednoznaczności rozwiązania równań (I) i (II), przy danych warunkach początkowych i granicznych, wrócimy jeszcze w dalszym ciągu.

Jakąkolwiek funkcyę wektorów $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$ lub ich rozmieszczenia *), niezawierającą wyraźnie czasu t, nazywam *funkcyą stanu* pola elektromagnetycznego lub pewnej jego dziedziny, skończonej lub elementarnej.

Jeżeli taka funkcya stanu zachowuje, zgodnie z równaniami (I) i (II), stałą wartość w czasie, nazywam ją *niezmiennikiem* pola, względnie: jego danej części lub elementu. Każdy z takich niezmienników możnaby też nazwać całką odpowiedniego układu równań różniczkowych; powyższa nazwa odpowiada jednak lepiej naturze fizycznej naszych rostrząsań.

Zauważmy, że wszelki układ równań różniczkowych *cząstkowych* dopuszcza *nieskończenie wiele* niezmienników *istotnych*, t. j. wzajemnie niezależnych.

Pewne niezmienniki elektromagnetyczne poznamy niebawem. Nasamprzód jednak powiemy słów kilka o istocie „uniwersalnego“ spółczynnika stałego c, który figuruje we wszystkich powyższych równaniach zasadniczych.

§ 13. *Wymiary* tego spółczynnika $[c]$ możemy bezpośrednio niemal wyczytać z równań (I) i (II).

Istotnie, według (I) mamy, oznaczając wymiary długości przez $[l]$:

$$[c^{-1}Dt^{-1}] = [c^{-1}t^{-1}\mathrm{KE}] = [\mathrm{curl}\ \mathrm{M}] = [\mathrm{M}l^{-1}],\ **)$$

---

*) a więc np. zawierającą *curl* lub *div* lub inne jakiekolwiek operatory różniczkowe *przestrzenne*.

**) Albowiem *curl* dowolnego wektora $\mathfrak{R}$ jest pewną *całką liniową* $\int \mathfrak{R} ds$ podzieloną przez pewną *powierzchnię*, t. j. $[\mathrm{curl}\ \mathrm{R}] = [\frac{\mathrm{Rl}}{l^2}] = [l^{-1}R]$; możemy też napisać symbolicznie, opuszczając wielkość, na której mamy operować:

$$[curl] = [l^{-1}];$$

sprawdza się to zresztą na wzorze [85] Wstępu; podobnie też będzie np $[div] = [l^{-1}]$.

zaś według (II):

$$[c^{-1}Bt^{-1}] = [c^{-1}t^{-1}\mu M] = [El^{-1}],$$

a więc, przez zestawienie tych dwóch równań wymiarowych:

$$[c^{-2}t^{-2}K\mu EM] = [l^{-2}EM],$$

t. j.

$$[c^{-2}t^{-2}K\mu] = [l^{-2}],$$

czyli wreszcie:

$$[c] = [(K\mu)^{1/2}.lt^{-1}].$$

Widzimy stąd, że wogóle — t. j. przy dowolnym wyborze jednostek dla K i μ, wielkość

$$\frac{c}{\sqrt{K\mu}} \quad \text{posiada wymiary prędkości,} \tag{34}$$

a więc spółczynnikiem *wewnętrznym* (nie zaś gatunkowym) danego dielektryka.

W dalszym ciągu zobaczymy, że *prędkość* ta $\frac{c}{\sqrt{K\mu}}$ jest mianowicie *prędkością roschodzenia się* zaburzeń elektromagnetycznych w dielektryku izotropowym o spółczynnikach K i μ.

Według powyższych naszych określeń (porówn. § 5) są zresztą K i μ liczbami niemianowanemi, tak iż sama już wielkość c posiada wymiary prędkości, t. j.

$$[c] = [lt^{-1}]. \tag{35}$$

Jest to mianowicie, jak zobaczymy, prędkość roschodzenia się fal elektromagnetycznych *w próżni*, równa prędkości światła, t. j. w okrągłych liczbach 300000 kilom. na sekundę. Ze stałą c spotkamy się też przy omawianiu wzajemnych stosunków różnych układów miar wielkości elektromagnetycznych.

§ 14. Aby otrzymać pewne, zapowiedziane już wyżej niezmienniki dla izolatora nieruchomego, zastosujmy do każdego z równań (I), (II) operacyę *div*. Ponieważ *div curl* = o i $div \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} div$,

przeto otrzymamy z równ. (II):

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = o,$$

t. j. $div\ \mathbf{B} = const.$ dla każdego z osobna punktu pola. Powiedzieliśmy już więcej niż raz jeden, że $div\ \mathbf{B} = o$ wszędzie i za-

wsze; wobec powyższego wyniku wystarcza jednak założyć dla jednej chociażby chwili $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, aby mieć stale *div* $\mathbf{B} = 0$. Nie omawiając więc dalej tego przedmiotu napiszemy raz na zawsze obok równań głównych wynikających wprost z praw I i II jako trzecie równanie warunkowe dla polaryzacyi magnetycznej, w *dowolnem* zresztą środowisku:

(III) $$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Stosując operacyę *div* do równania (I), otrzymamy analogicznie

(36) $$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

t. j. $\rho = const.$ *W izolatorze więc doskonałym ładunek prawdziwy* każdego elementu $d\tau$ *zachowuje niezmiennie swą wartość*, niebacząc na zmiany sił elektrycznych i towarzyszących im magnetycznych. Innemi słowy: $\rho = div\, \mathbf{D} = div\, (K\mathbf{E})$ jest *niezmiennikiem* każdego z osobna elementu pola; lub jeszcze inaczej: w izolatorze doskonałym nieruchomym, elektryczność (prawdziwa) nie podlega żadnym zmianom lokalnym ani też nie przenosi się z miejsca na miejsce.

W tej już okoliczności można upatrywać jednego — że tak powiem — z motywów ucieleśnienia elektryczności. Nazywając ją jednak po prostu niezmiennikiem każdego elementu, sądzę, że nie powiedzieliśmy ani za wiele *ani też za mało.*

Wiemy już, że wogóle może być $\rho = \operatorname{div} \mathbf{D} \neq 0$. Otóż, na podstawie powyższego wyniku, możemy powiedzieć, że dowolne rozmieszczenie początkowe ładunku nie podlega w izolatorze doskonałym (jak dotychczas przynajmniej — nieruchomym) żadnym zmianom czasowym, w odmęcie najzawilszych zaburzeń elektromagnetycznych, byle tylko czyniących zadość równaniom (I) i (II), lub chociażby tylko pierwszemu z tych równań.

Jak sprawa ta przedstawia się dla półprzewodników tudzież dla środowisk ruchomych, zobaczymy niebawem. Tymczasem zaś pozostaniemy jeszcze nieco przy izolatorze nieruchomym.

Zauważmy tu więc jeszcze, że ze stałości ładunku prawdziwego nie wynika bynajmniej wogóle niezmienność ładunku *pozornego* (o gęstości ρ'); istotnie, według (16) mamy dla dielektryka niejednorodnego (lecz izotropowego): $K\rho' = \rho - (\mathbf{E}\nabla)K$, a więc:

(37) $$K \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -(\dot{\mathbf{E}}\nabla)K,$$

jeżeli założymy, że K jest stałe w czasie; będzie więc wogóle

$\frac{\partial \rho'}{\partial t} \neq 0$, i tylko dla środowiska *jednorodnego* $\frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0$, czyli $\rho' = \text{const.}$

Jak widzieliśmy, *div* **D** jest niezmiennikiem, dla każdego elementu lub punktu pola, zupełnie niezależnie od jakichkolwiek warunków granicznych (lub początkowych).

Poznamy teraz jeszcze jeden niezmiennik o innym nieco charakterze, a mianowicie przysługujący skończonej dziedzinie pola *przy pewnych warunkach granicznych* albo też całej nieskończonej przestrzeni przy pewnym sposobie zachowania się sił **E**, **M** w nieskończoności.

Aby otrzymać tę funkcyę stanu i zbadać, w jakich warunkach staje się ona istotnie niezmiennikiem, pomnóżmy równanie (I) skalarnie przez **E**, zaś (II)-skalarnie przez **M** i dodajmy je do siebie. Ponieważ $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{ED}) = \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 2\,\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ i podobnie $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{MB}) = 2\,\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ *), możemy napisać:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{ED} + \mathbf{MB}) = \mathbf{E}.\text{curl}\,\mathbf{M} - \mathbf{M}.\text{curl}\,\mathbf{E},$$

czyli, według wzoru (98) wyprowadzonego we Wstępie:

$$(38) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{ED} + \mathbf{MB}) = -\,c.\text{div}\,V\mathbf{EM}.$$

(Z ostatniego równania skorzystamy jeszcze w Rozdz. III, omawiając pojęcie „prądu energii“.)

Połóżmy dla skrócenia

$$(39) \qquad c.V\mathbf{EM} = \mathbf{F},$$

tak iż będzie

$$(38') \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{ED} + \mathbf{MB}) = -\,\text{div}\,\mathbf{F};$$

---

*) Istotnie, jeżeli tylko spółczynniki lub wogóle operatory liniowe K, μ nie zmieniają się z czasem, mamy

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E}\frac{\partial}{\partial t}(K\mathbf{E}) = \mathbf{E}.K\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = K\mathbf{E}.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

co możemy sprawdzić, pisząc $K\mathbf{E} = \mathbf{i}K_1E_1 + \mathbf{j}K_2E_2 + \mathbf{k}K_3E_3$; podobnie też

$$\mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}.$$

pomnóżmy to równanie obustronnie przez $d\tau$ i weźmy jego całkę dla dowolnej dziedziny przestrzeni τ ograniczonej powierzchnią σ o normalnej zewnętrznej ν; ze względu na równość $\int \operatorname{div} \mathbf{F}.d\tau = \int \mathbf{F}\nu.d\sigma$, zachodzącą przy założeniu, że składowa normalna wektora $\mathbf{F}$ jest *ciągła* w całej dziedzinie τ [porówn. Wstęp, (66), (67)], otrzymamy wówczas:

$$(40) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (\mathbf{ED} + \mathbf{MB})d\tau = -\int \mathbf{F}\nu.d\sigma.$$

1-o) *Dziedzina ograniczona.* Jeżeli założymy, że wektor $\mathbf{F}$ jest *styczny* do powierzchni σ ograniczającej dziedzinę τ (t. j. jeżeli np. siła $\mathbf{E}$ lub siła $\mathbf{M}$ jest *normalną* do σ), natenczas będzie $\mathbf{F}\nu = 0$, dla każdego elementu $d\sigma$, a więc $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (\ )d\tau = 0$, czyli:

$$(41) \qquad \int (\mathbf{ED} + \mathbf{MB})\, d\tau = \text{const.},$$

t. j. $\int (\mathbf{ED} + \mathbf{MB})d\tau$ będzie *niezmiennikiem* dziedziny τ.

2-o) *Dziedzina nieograniczona.* Jeżeli chodzi o całą przestrzeń, możemy uważać σ jako powierzchnię bezgranicznie rosnącej kuli; jeżeli w tym wypadku założymy, że *natężenia sił elektrycznej i magnetycznej maleją jak* $\frac{1}{r^2}$, natenczas $\mathbf{F}\nu$ będzie malało jak $\frac{1}{r^4}$, a więc całka $\int \mathbf{F}\nu d\sigma$ z rosnącym promieniem r kuli będzie maleć jak $\frac{1}{r^2}$, tak iż $Lim \int \mathbf{F}\nu.d\sigma = 0$, a więc $\int (\mathbf{ED} + \mathbf{MB}).d\tau$ będzie znowu *niezmiennikiem* całego pola elektromagnetycznego.

— Później dopiero zobaczymy, że całka ta, którą moglibyśmy nazwać niezmiennikiem *warunkowym* pola w izolatorze nieruchomym (ze względu na warunki wystarczające dla znikania całki po-

wierzchniowej $\int \mathbf{F}_\nu d\sigma$), posiada doniosłe znaczenie fizyczne, a mianowicie wyraża energię odpowiedniego pola.

Zauważmy, że iloczyny skalarne $\mathbf{ED}$, $\mathbf{MB}$ są zawsze *dodatnie* i znikają *wówczas tylko*, gdy $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{M} = 0$; wówczas też jest zresztą $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{B} = 0$.

Istotnie, dla ciała lub środowiska izotropowego mamy $\mathbf{ED} = KE^2$, $\mathbf{MB} = \mu M^2$, zaś spółczynniki K i μ są — jak wiadomo z doświadczenia — zawsze dodatnie; dla środowiska krystalicznego mamy znowu $\mathbf{ED} = K_1E_1^2 + K_2E_2^2 + K_3E_3^2$, $\mathbf{MB} = \mu_1M_1^2 + \mu_2M_2^2 + \mu_3M_3^2$, i wartości główne K_1, K_2, K_3, μ_1, μ_2, μ_3 są zawsze dodatnie.

Całka więc $\int (\mathbf{ED} + \mathbf{MB}) d\tau$ może znikać, dla dowolnej dziedziny τ, *li tylko wówczas*, gdy dla każdego punktu tej dziedziny jest $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{M} = 0$, t. j. gdy całe pole w τ znika.

§ 15. Opierając się na wynikach poprzedniego §, możemy łatwo okazać *jednoznaczność* rozwiązań równań (I) i (II) przy danych warunkach początkowych i granicznych.

Niechaj mianowicie dla $t = t_0$ będą dane $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{M}_0$ *dla całej dziedziny* τ, ograniczonej przez powierzchnię σ, i oprócz tego *dla samej powierzchni* σ *i dla wszelkich czasów* t:

1-o) składowa styczna siły $\mathbf{E}$, albo

2-o) składowa styczna siły $\mathbf{M}$.

Przypuśćmy na chwilę, że $\mathbf{E}'$, $\mathbf{M}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{B}'$ i $\mathbf{E}''$, $\mathbf{M}''$, $\mathbf{D}''$, $\mathbf{B}''$ są dwa rozwiązania równań (I), (II), czyniące zadość danym warunkom początkowym i jednemu z dwóch powyższych warunków granicznych. Połóżmy $\mathbf{E}' - \mathbf{E}'' = \mathbf{E}$, $\mathbf{M}' - \mathbf{M}'' = \mathbf{M}$, $\mathbf{D}' - \mathbf{D}'' = \mathbf{D}$, $\mathbf{B}' - \mathbf{B}'' = \mathbf{B}$. Otrzymamy wówczas, według (40), dla wszelkich t

$$\frac{d}{dt} \int (\mathbf{ED} + \mathbf{MB}) d\tau = -2 \int \mathbf{F}_\nu d\sigma,$$

gdzie

$$\mathbf{F} = c\mathbf{V}\mathbf{EM} = \mathbf{V}(\mathbf{E}' - \mathbf{E}'')\ (\mathbf{M}' - \mathbf{M}''),$$

Otóż w wypadku 1-o) siły $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$ różnią się od siebie li tylko przez składową *normalną* (skoro składowa styczna jest przepisana); możemy więc napisać $\mathbf{E}' - \mathbf{E}'' = f.\nu$, gdzie f jest skalarem, a więc:

$$\mathbf{F} = \text{cf.} V\nu(\mathbf{M}' - \mathbf{M}'').$$

tak iż

$$F\nu = 0;$$

w wypadku 2-o) mamy podobnie $\mathbf{M}' - \mathbf{M}'' = g.\nu$ (gdzie g jest skalarem), a więc również $F\nu = 0$.

W obydwu więc wypadkach będzie $\frac{d}{dt}\int(\mathbf{ED} + \mathbf{MB})d\tau = 0$,

dla wszelkich t, t. j. $\int(\mathbf{ED} + \mathbf{MB})d\tau = \text{const.}$; ponieważ zaś dla $t = t_0$ jest $\mathbf{E}'_0 = \mathbf{E}''_0$, i t. d., t. j. $\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{M}_0 = 0$, przeto — w założeniu, że wszystkie zmiany są ciągłe w czasie — będzie

$$\int(\mathbf{ED} + \mathbf{MB})d\tau = 0 \text{ dla wszelkich } t,$$

a więc $E = 0$, $M = 0$, t. j. $\mathbf{E}' = \mathbf{E}''$, $\mathbf{M}' = \mathbf{M}''$ tudzież $\mathbf{D}' = \mathbf{D}''$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}''$ dla wszelkich czasów, t. j. dla całej „epoki".

Istnieje więc, w danem środowisku, *jedyne* tylko pole zmieniające się według (I) i (II) i czyniące zadość powyższym warunkom.

Gdybyśmy zresztą dopuścili nieciągłości zmian w czasie, wystarczyłoby je również przepisać z góry dla $\mathbf{E}$ i $\mathbf{M}$, aby wykluczyć możność dwóch różnych rozwiązań; wówczas bowiem $\mathbf{E}' - \mathbf{E}''$ i $\mathbf{M}' - \mathbf{M}''$ byłyby *ciągłe* w czasie, tak iż moglibyśmy powtórzyć dosłownie całe powyższe rozumowanie.

§ 16. Równania różniczkowe (I), (II), (III) są *liniowe i jednorodne*, t. j. zawierają pochodne wektorów zmiennych zależnych (ze względu na czas i spółrzędne) *w pierwszym tylko stopniu* i nie zawierają żadnego wyrazu wolnego od $\mathbf{E}$, $\mathbf{M}$ lub od pochodnych tych wektorów: spółczynniki zaś w równaniach tych są stałe. Otóż, stąd wypływa pewna zasadnicza własność różnych całek szczególnych tych równań, a mianowicie t. zw. własność *superpozycyi* pól elektromagnetycznych. Możemy zresztą powiedzieć, nie posługując się utartym językiem teoryi równań różniczkowych, że własność ta polega bezpośrednio na *rozdzielnościowości* wszystkich operacyj, którym poddane są wektory $\mathbf{E}$, $\mathbf{M}$ w tych równaniach, t. j. $\frac{\partial}{\partial t}$, *curl*, *div* i K, μ; mamy bowiem dla dwóch dowolnych wektorów $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad K(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = K\mathbf{A} + K\mathbf{B}, \text{ nawet dla ciał}$$

krystalicznych, i podobnie *curl* $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \text{curl}\,\mathfrak{A} + \text{curl}\,\mathfrak{B}$, *div* $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \text{div}\,\mathfrak{A} + \text{div}\,\mathfrak{B}$.

Niechaj $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{E}''$, $\mathfrak{M}''$ będą jakiemikolwiek *całkami* *) równań (I), (II), (III) natenczas dodając do siebie odpowiednie równania

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial t} = \text{curl}\,\mathfrak{M}', \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}''}{\partial t} = \text{curl}\,\mathfrak{M}'' \text{ i podobnie dla (II), (III),}$$

otrzymamy ze względu na rozdzielnościowość operatorów:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'') = \text{curl}\,(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''),$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'') = -\,\text{curl}\,(\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''),\ \text{div}\,(\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'') = 0,$$

t. j.: *sumy całek równań* (I), (II), (III) *są również całkami tego układu równań.* Innemi słowy: suma (wektorowa) czyli *superpozycya dwóch możliwych pól elektromagnetycznych jest również polem elektromagnetycznem możliwem w danym dielektryku.*

Każde z pól składowych będzie czyniło zadość pewnym szczególnym warunkom początkowym i granicznym (gdybyśmy chcieli obrać dowolną chwilę jako „początkową“ i dowolne powierzchnie jako „granice“ pola), superpozycya ich zaś $(\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'', \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'')$ będzie oczywiście czyniła zadość *innym* wogóle warunkom początkowym i granicznym. Rozważania niniejszego § mają atoli być niezależne od żadnych takich warunków, i dotyczą jedynie istoty samych równań różniczkowych.

To samo, cośmy powiedzieli o dwóch polach, można oczywiście zastosować natychmiast do dowolnej liczby pól $\mathfrak{E}', \mathfrak{M}'; \mathfrak{E}'', \mathfrak{M}''; \mathfrak{E}''', \mathfrak{M}''', \ldots$ i do ich superpozycyi: $\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'' + \mathfrak{E}''' + \ldots; \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' + \mathfrak{M}''' + \ldots$

Możemy też każde z pól składowych pomnożyć przez dowolną *stałą skalarną* (a', a'' i t. d.), a otrzymana tym sposobem superpozycya $a'\mathfrak{E}' + a''\mathfrak{E}'' + a'''\mathfrak{E}''' + \ldots, a'\mathfrak{M}' + a''\mathfrak{M}'' + a'''\mathfrak{M}''' + \ldots$ będzie również możliwem polem elektromagnetycznem.

Zakładając, że K, μ są niezmienne *w czasie*, możemy napisać, zamiast (I), (II), (III):

$$(42)\qquad K\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c.\text{curl}\,\mathfrak{M}, \quad \mu\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = -\,c.\text{curl}\,\mathfrak{E}, \quad \text{div}\,(\mu\mathfrak{M}) = 0.$$

---

*) Przez „całkę“ rozumiem tu *parę* wektorów $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, które w swej zależności od czasu i miejsca *czynią zadość* wszystkim naszym równaniom, zupełnie bez względu na jakiekolwiek warunki początkowe lub graniczne, a więc oczywiście nie „rozwiązanie“ jak w § 15, które zawsze jest tylko jedyne.

Różniczkując równania te ze względu na czas i uwzględniając, że $\frac{\partial}{\partial t}\, curl = curl\, \frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial t}\, div = div\, \frac{\partial}{\partial t}$, otrzymamy

$$K \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = c.curl\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right),$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right) = -\, c.curl\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right), \quad div\left(\mu \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right) = o.$$

Jeżeli więc $\mathbf{E}, \mathbf{M}$ jest całką równań (42), natenczas $\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, $\dot{\mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$ stanowi również całkę tychże równań, a podobnie też drugie i wyższe pochodne $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2}; \frac{\partial^3 \mathbf{E}}{\partial t^3}, \frac{\partial^3 \mathbf{M}}{\partial t^3}$, i t. d., wzięte zawsze parami.

Dla środowiska *jednorodnego* K i μ są niezależne od położenia punktu, czyli stałe w przestrzeni, tak iż, różniczkując równania (42) np. ze względu na x, możemy napisać

$$K \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}\right) = c.curl\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}\right),$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}\right) = -\, c.curl\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}\right), \quad \mu\, div\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}\right) = o;$$

jeżeli więc $\mathbf{E}, \mathbf{M}$ stanowią całkę równań (42), natenczas $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}$ czynią również zadość tymże równaniom. Zamiast $\frac{\partial}{\partial x}$ (lub $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$) możemy też zastosować np. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, ∇^2 i t. d., *curl*, *div* i t. d. i wogóle jakąkolwiek *operacyę różniczkową przestrzenną*, byle tylko rozdzielnościową. Oznaczając więc taką operacyę przez Ω, możemy powiedzieć: Jeżeli $\mathbf{E}, \mathbf{M}$ stanowią całkę równań (I), (II), (III) dla środowiska jednorodnego, natenczas $\Omega\mathbf{E}, \Omega\mathbf{M}$ również stanowią ich całkę.

Kombinując proces ten z różniczkowaniem ze względu na czas, z mnożeniem przez stałe czynniki i sumowaniem czyli superpozycyą poszczególnych pól, możemy oczywiście z jednej, znalezio-

nej przypadkiem, całki szczególnej $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$. wyprowadzić natychmiast mnóstwo innych.

W pewnych wypadkach można tym właśnie sposobem otrzymać całkę *dość ogólną*, aby dała się ona przystosować do przepisanych warunków początkowych i granicznych.

§ 17. Od warunków przepisanych dla powierzchni ograniczającej całe pole rozważane należy odróżnić warunki, które mają być spełnione *na powierzchni granicznej dwóch różnych dielektryków*, rozciągającej się w samem polu.

Otóż, warunki te (których nie można przepisać dowolnie), wyprowadzimy łatwo z równań zasadniczych (I), (II), zakładając mianowicie — raz na zawsze — że wszelkie zmiany *czasowe* wektorów elektrycznych i magnetycznych odbywają się *z prędkością skończoną*, t. j. że $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$, a więc też $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ nie osiągają nigdy i nigdzie wartości nieskończenie wielkich.

Niechaj σ będzie taką powierzchnią graniczną i niechaj litery $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, K i t. d. bez akcentów stosują się do jednej strony σ, czyli do pierwszego środowiska, zaś odpowiednie litery z akcentami $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{M}'$ i t. d., do drugiej strony σ, czyli do drugiego środowiska.

We wszystkich punktach tej powierzchni ma być $\dot{\mathfrak{D}}$ skończone, a więc według (I) *curl* $\mathfrak{M}$ — wektorem o natężeniu *skończonem*. Innemi słowy: σ *nie może być powierzchnią wirową*, t. j. warstwą wirową o grubości zero i o momencie skończonym *), a więc: przy przejściu przez powierzchnię σ *składowa styczna siły* $\mathfrak{M}$ *jest ciągła*:

$$\mathfrak{M}\Theta = \mathfrak{M}'\Theta, \tag{43}$$

gdzie Θ jest wektorem jeonostkowym w kierunku składowej stycznej, wspólnym jednej i drugiej stronie.

Zupełnie podobnie wynika ze skończoności $\dot{\mathfrak{B}}$ i z równania (II) ciągłość *składowej stycznej* siły elektrycznej $\mathfrak{E}$, przy przejściu od jednego do drugiego środowiska, co możemy napisać krótko:

$$\mathfrak{E}\Theta = \mathfrak{E}'\Theta. \tag{44}$$

Możemy tedy powiedzieć sumarycznie:

Składowe styczne sił elektrycznych i magnetycznych są ciągłe przy przejściu od jednego dielektryka do drugiego.

Aby poznać sposób zachowania się składowych *normalnych* u powierzchni σ, skorzystajmy z równania

*) To bowiem dałoby curl $\mathfrak{M} = \infty$ dla punktów σ.

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

wynikającego z (I) identycznie. Aby zastosować je do naszego wypadku, wyobraźmy sobie zamiast geometrycznej powierzchni σ, przy przejściu przez którą spółczynnik dielektryczny zmienia się nagle, *warstwę przejściową* (tak zwaną) o grubości δ bardzo małej lecz skończonej, w której spółczynnik ów przechodzi stopniowo, acz bardzo szybko od K do K'. Z warstwy tej wykrojmy walec prosty o przekroju $d\sigma$ i o osi równoległej do normalnej ν naszej powierzchni w danem miejscu; objętość tego walca będzie $d\sigma.\delta$. Pomnóżmy lewą stronę powyższego równania przez element objętości $d\tau$ i rozciągnijmy jej całkę na całą objętość tego walca; wówczas otrzymamy:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int \operatorname{div} \mathbf{D}.d\tau = d\sigma. \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} \left[\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} + \frac{\partial D_3}{\partial z} \right] dx,$$

jeżeli mianowicie obierzemy oś x-ów w kierunku normalnej ν, zaś osie spółrzędnych y i z w płaszczyźnie stycznej do σ. Ponieważ y, z mierzymy w kierunkach stycznych do powierzchni granicznej, przeto w założeniu, że *krzywizna* tej powierzchni jest *skończona*— pochodne $\frac{\partial D_2}{\partial y}$, $\frac{\partial D_3}{\partial z}$ będą *skończenie wielkie*; w granicy więc, t. j. dla ustawicznie malejącej grubości warstwy, otrzymamy:

$$\operatorname{Lim}_{\delta = 0} \int_0^{\delta} \frac{\partial D_2}{\partial y} dx = 0, \qquad \operatorname{Lim}_{\delta = 0} \int_0^{\delta} \frac{\partial D_3}{\partial z} dx = 0,$$

tak iż będzie

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Lim} \int_0^{\delta} \frac{\partial D_1}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial t} (D'_1 - D_1) \text{ *}).$$

---

*) Zauważmy, że wzór ten nie zależy od *sposobu*, w jaki D_1 przechodzi w D'_1 w pomocniczej warstwie; albowiem przed osiągnięciem *Lim* mamy we wzorze naszym pod całką wyraz $\frac{\partial D_1}{\partial x} dx$, t. j. *różniczkę zupełną* wielkości D_1.

Lecz oś x-ów była równoległa do normalnej ν; możemy więc napisać $D'_1 = \mathbf{D}'\nu$, $D_1 = \mathbf{D}\nu$, a więc:

$$(45) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}'\nu - \mathbf{D}\nu) = 0; \quad \mathbf{D}'\nu - \mathbf{D}\nu = \text{const.}$$

Skok więc składowej normalnej polaryzacyi elektrycznej na granicy dwóch dielektryków (doskonałych izolatorów), czyli *gęstość powierzchniowa ładunku prawdziwego nie zmienia się z czasem.* Innemi słowy $\eta = (\mathbf{D}' - \mathbf{D})\nu$ jest *niezmiennikiem* każdego elementu powierzchni granicznej, podobnie jak $\rho = \text{div}\,\mathbf{D}$ było niezmiennikiem każdego elementu objętości.

Dla powierzchni σ pierwotnie *nienaelektryzowanej* mamy *stale* $\eta = 0$, t. j.:

$$(46) \qquad \mathbf{D}\nu = \mathbf{D}'\nu, \text{ czyli } K\mathbf{E}.\nu = K'\mathbf{E}'.\nu.$$

Podobnie też otrzymamy z równania $\frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\,\mathbf{B} = 0$, wynikającego z (II), dla powierzchni granicznej:

$$(47) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}'\nu - \mathbf{B}\nu) = 0; \quad \mathbf{B}'\nu - \mathbf{B}\nu = \text{const.}$$

Wiemy już zresztą, że jest zawsze i wszędzie $\mathbf{B}'\nu - \mathbf{B}\nu = 0$. Przyjmując równanie (II) i skończoność $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, wystarcza atoli założyć $\mathbf{B}'\nu - \mathbf{B}\nu = 0$ dla jednej chociażby chwili, aby mieć $\mathbf{B}'\nu - \mathbf{B}\nu = 0$ dla wszelkich czasów.

§ 18. Przejdźmy teraz do *półprzewodnika nieruchomego.* Dla środowiska takiego równanie (II) pozostanie bez zmiany, podobnie jak (III); zamiast równania (I) atoli otrzymamy, podstawiając we wzorze ogólnym (*A*) za prąd elektryczny p sumę wektorową $p = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \lambda\,\mathbf{E}$ (według § 10):

$$(\text{Ia}) \qquad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \lambda \mathbf{E} = c.\text{curl}\,\mathfrak{H};$$

dla uzupełnienia napiszmy dwa pozostałe równania niezmienione:

$$(\text{IIa}) \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\,c.\text{curl}\,\mathbf{E},$$

$$(\text{IIIa}) \qquad \text{div}\,\mathbf{B} = 0.$$

W założeniu, że dane są spółczynniki, względnie operatory wektorowe liniowe K,μ,λ, mamy w (Ia), (IIa) *dwa* równania różniczkowe (cząstkowe), I-go rzędu ze względu na t, dla dwóch wektorów **E**, **M**, nieinaczej jak dla doskonałego izolatora. Możemy więc znowu w tem samem znaczeniu wyrazów, jak w § 12, mówić o funkcyach stanu lub w szczególności o niezmiennikach pola elektromagnetycznego w półprzewodniku.

Zacznijmy od $\rho = div\ \mathbf{D}$, aby okazać, że wielkość ta, która była niezmiennikiem w izolatorze doskonałym (§ 14), przestaje być nim w dielektryku przewodzącym, a tembardziej w potocznie tak zwanym przewodniku.

Istotnie, stosując do (Ia) operacyę *div*, otrzymamy tym razem:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\ \mathrm{div}\ (\lambda \mathbf{E}), \tag{47}$$

a więc wogóle $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, t. j. ρ *zmienne z czasem.*

Równanie (47) możemy scałkować natychmiast w wypadku najprostszym, a mianowicie dla środowiska *izotropowego i jednorodnego.* Wówczas bowiem mamy:

$$\rho = \mathrm{div}\ \mathbf{D} = \mathrm{div}\ (K\mathbf{E}) = K\ \mathrm{div}\ \mathbf{E},$$

$$\mathrm{div}\ (\lambda \mathbf{E}) = \lambda . \mathrm{div}\ \mathbf{E} = \frac{\lambda}{K}\ \rho,$$

a więc:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\ \frac{\lambda}{K}\ \rho, \tag{47a}$$

tak iż dla każdego punktu pola jest:

$$\rho = \rho_0\, e^{-\frac{\lambda}{K} t} = \rho_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{48}$$

gdzie ρ_0 jest wartością ρ dla $t = 0$, e zasadą logarytmów naturalnych, zaś

$$\tau = \frac{K}{\lambda}. \tag{49}$$

Widzieliśmy już w § 10, że iloraz ten posiada wymiary *czasu*; obecnie zaś widzimy z (48), że wyraża on czas, w ciągu którego ładunek elektryczny każdego elementu półprzewodnika nieruchomego spada do 1/e-tej pierwotnej swej wartości, czyli jest t. zw. *czasem relaksacyjnym* danego półprzewodnika izotropowego, jednorodnego, pozostającego w spoczynku.

Jakiekolwiek więc rozmieszczenie pierwotne elektryczności za-

nika stopniowo i ustawicznie w całym półprzewodniku, i to *tem prędzej*, im większe jest λ w porównaniu do K, t. j. *im „lepszym jest on przewodnikiem“* — według utartej terminologii.

Mnożąc (47) przez element objętości $d\tau$ i całkując dla dowolnej dziedziny τ ograniczonej powierzchnią σ, o normalnej zewnętrznej ν, mamy:

$$(50) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int \rho d\tau = \frac{\partial e}{\partial t} = -\int \lambda \mathbf{E}.\nu.d\sigma.$$

Możemy więc powiedzieć, że ładunek całkowity e zawarty w τ maleje z czasem tak, jak gdyby przez każdy element powierzchni σ „wypływała“ nazewnątrz ilość elektryczności $\lambda \mathbf{E}.\nu.d\sigma$, na jednostkę czasu, czyli $\lambda \mathbf{E}.\nu$ na jednostkę czasu i powierzchni, a więc tak, jak gdyby „elektryczność płynęła“ wszędzie w kierunku wektora $\lambda \mathbf{E}$ i jak gdyby natężenie odpowiedniego „prądu“ wypadkowego wynosiło $\lambda \mathbf{E}$ jednostek elektryczności na jednostkę czasu i na jednostkę powierzchni. Stąd też moglibyśmy usprawiedliwić nazwę prądu elektrycznego przewodzonego“, którą oznacza się powszechnie wektor $\lambda \mathbf{E}$, tudzież kojarzone z nią zwykle obrazy. Nie należy jednak zapominać, że mają one charakter czystej analogii, której zresztą nie można odmówić pewnej wastości.

O ile chodzi o zadośćuczynienie równaniu (47), możemy też oczywiście zamiast wektora $\lambda \mathbf{E}$ wziąć $\lambda \mathbf{E} + \mathbf{R}$, gdzie $\mathbf{R}$ jest zupełnie dowolnym wektorem *solenoidalnym*.

§ 19. Widzieliśmy w § 14, że całka

$$(51) \qquad U = \frac{1}{2}\int (\mathbf{ED} + \mathbf{MB}) d\tau$$

obejmująca dowolną część τ izolatora doskonałego jest niezmiennikiem dziedziny τ, jeżeli tylko całka powierzchniowa wektora $\mathbf{F} = c\,\mathbf{VEM}$, t. j. $\int \mathbf{F}\nu.d\sigma$ (dla powierzchni σ ograniczającej τ) znika.

Otóż zobaczymy obecnie, że całka ta U przy zachowaniu nawet warunku $\int \mathbf{F}\nu d\sigma = 0$, przestaje być niezmiennikiem dla półprzewodnika.

Istotnie, mnożąc (Ia) przez $\mathbf{E}$, zaś (IIa) przez $\mathbf{M}$ (skalarnie) i biorąc sumę tych równań, otrzymamy

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{ED} + \mathbf{MB}) + \lambda \mathbf{E}.\mathbf{E} = -\operatorname{div} \mathbf{F}$$

[porównaj (38′)], a więc, całkując dla dziedziny τ i korzystając

z warunku $\int \mathbf{F}\nu . d\sigma = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \int \lambda \mathbf{E} . \mathbf{E} . d\tau = 0, \tag{52}$$

gdzie λ jest, wogóle, operatorem wektorowym liniowym, tak iż kierunki wektorów $\lambda\mathbf{E}$ i $\mathbf{E}$ *nie* zlewają się ze sobą; dla półprzewodnika izotropowego λ jest zwykłym czynnikiem skalarnym, tak iż $\lambda\mathbf{E}.\mathbf{E} = \lambda E^2$, a więc:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \int \lambda E^2 d\tau = 0. \tag{52a}$$

U zmienia się więc z czasem, a mianowicie *maleje ustawicznie* (albowiem λE^2 i wogóle $\mathbf{E}.\lambda\mathbf{E}$ jest zawsze dodatnie); ubytek zaś ilości U — jak zobaczymy później, energii elektromagnetycznej — na jednostkę czasu i na jednostkę objętości półprzewodnika równa się $\mathbf{E}.\lambda\mathbf{E}$, względnie λE^2, t. j. — jak wiadomo z doświadczenia — ilości *ciepła* wytwarzanej nieodwracalnie w takiem środowisku, na jednostkę czasu i objętości („*ciepło Joule'a*").

§ 20. Ponieważ równania (Ia), (IIa), (IIIa) są również *liniowe i jednorodne*, jak dla izolatora, przeto własność *superpozycyi*, wyłożona w § 16, przysługuje też polom elektromagnetycznym w półprzewodnikach. Z tej samej przyczyny zachodzą też dla środowisk takich wszelkie stosunki, które poznaliśmy w § 16.

§ 21. Rozważymy teraz warunki dla *powierzchni granicznej* dwóch półprzewodników.

Dla siły i polaryzacyi *magnetycznej* są one zupełnie takie same jak dla izolatorów doskonałych, albowiem równania (IIa) i (IIIa) nie różnią się niczem od równań (II) i (III).

Dla wektorów *elektrycznych* otrzymamy natomiast warunek odmienny niż poprzednio dla izolatorów; posługując się mianowicie równaniem (47), czyli

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{div} (\lambda \mathbf{E}) = 0,$$

uciekając się do „warstwy przejściowej" i postępując zupełnie podobnie zresztą jak w § 17, będziemy mieli:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D}'\nu - \mathbf{D}\nu) + (\lambda'\mathbf{E}' - \lambda\mathbf{E})\nu = 0, \tag{53}$$

zamiast (45), — czyli, oznaczając — jak zwykle — gęstość powierzchniową ładunku elektrycznego $(\mathbf{D}' - \mathbf{D})\nu$ przez η:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\lambda'\mathbf{E}' - \lambda\mathbf{E})\nu = 0. \tag{53'}$$

Ładunek więc powierzchniowy na granicy dwóch półprzewodników nie jest *niezmiennikiem*, nieinaczej jak ładunek przestrzenny wewnątrz półprzewodnika.

Pisząc $\mathbf{D} = K\mathbf{E}$, $\mathbf{D}' = K'\mathbf{E}'$, mamy — zamiast (53) —

$$K' \frac{\partial \mathbf{E}'\nu}{\partial t} - K \frac{\partial \mathbf{E}\nu}{\partial t} + (\lambda'\mathbf{E}' - \lambda\mathbf{E})\nu = 0. \tag{53''}$$

Dla ciał *izotropowych* K,K',λ,λ' są spółczynnikami skalarnemi, ilorazy zaś K/λ, K'/λ' wyrażają odpowiednie czasy relaksacyjne, powiedzmy τ i τ'; wprowadzając je do (53''), mamy:

$$K' \left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \frac{\mathbf{E}'}{\tau'}\right)\nu = K \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{E}}{\tau}\right)\nu. \tag{54}$$

Dla dwóch *dobrych przewodników* (jak metale), dla których czasy relaksacyjne będą bardzo krótkie, a raczej — dokładniej mówiąc — dla drgań peryodycznych lub *quasi*-peryodycznych *o okresie T bardzo wielkim w porównaniu z czasem* τ *i z czasem* τ', pierwsze wyrazy w nawiasach równania (54) można zaniechać wobec drugich *), tak iż (54 redukuje się do $\frac{K'}{\tau'}\mathbf{E}' = \frac{K}{\tau}\mathbf{E}$, czyli do

$$\lambda'\mathbf{E}'.\nu = \lambda\mathbf{E}.\nu. \tag{55}$$

Warunek ten wyraża *ciągłość składowej normalnej prądu przewodzonego* (prąd bowiem przesunięcia elektrycznego zaniechaliśmy); jeżeli prąd nie jest normalny do powierzchni granicznej, mamy *„załamanie" linij prądu* według wzoru:

$$\mathrm{tg}\alpha : \mathrm{tg}\alpha' = \lambda : \lambda', \tag{56}$$

w którym α, α' oznaczają kąty zawarte między normalną ν a linią prądu w jednym i drugim przewodniku tuż przy powierzchni granicznej. Wzór ten wynika bezpośrednio z (55) i z *ciągłości składowej stycznej siły elektrycznej*, t. j. z równania $\mathbf{E}\Theta = \mathbf{E}'\Theta$ [patrz (44)].

Ciągłość składowej stycznej siły $\mathbf{E}$ przysługuje bowiem również stykającym się półprzewodnikom i w szczególności też „dobrym" przewodnikom; istotnie, w § 17 wyprowadziliśmy ją z równania (II), t. j. z $\dot{\mathbf{B}} = -c.curl\,\mathbf{E}$, a równanie to stosuje się też do ciał przewodzących bez żadnych zmian lub uzupełnień.

---

*) Warunek dotyczący T/τ i T/τ' zrozumiemy dopiero w dalszym ciągu.

Dla dobrego *przewodnika* stykającego się z *doskonałym izolatorem* ($\lambda' = 0$) otrzymamy z (54):

$$\lambda \mathbf{E}.\nu = K' \frac{\partial E'_\nu}{\partial t}; \tag{57}$$

możemy więc powiedzieć, że prąd przesunięcia w izolatorze ($K\dot{\mathbf{E}}' = \dot{\mathbf{D}}'$) stanowi przedłużenie prądu przewodzonego w przewodniku ($\lambda \mathbf{E}$), lub odwrotnie.

Pozostaje jeszcze rozważenie składowej *stycznej* siły *magnetycznej* na granicy dwóch półprzewodników (składowa normalna zachowuje się tu bowiem tak samo jak na granicy dwóch izolatorów, mianowicie $\mu \mathbf{M}.\nu = \mu' \mathbf{M}'\nu$). Istotnie, wzór (43) wyprowadziliśmy z równania (I), a zamiast równania tego mamy dla półprzewodników równanie *odmienne* (Ia). Należy więc w każdym razie sprawę tę jeszcze raz tu rostrząsnąć.

Ze skończoności $\dot{\mathbf{D}}$ wynika przedewszystkiem, według (Ia), skończoność wektora

$$\mathbf{P} = \operatorname{curl} \mathbf{M} - \frac{1}{c} \lambda \mathbf{E} \tag{58}$$

w punktach powierzchni granicznej.

Położmy oś x-ów wzdłuż normalnej ν, zaś osie y-ów i z-ów w płaszczyznie stycznej do tej powierzchni, w danym jej punkcie, i oznaczmy przez wskaźniki 1, 2, 3 składowe wszelkich wektorów wzięte wzdłuż tych osi. Niechaj zresztą obadwa środowiska będą *izotropowe* (o spółczynnikach skalarnych λ, λ'). Według (58) mamy wówczas:

$$\text{(a)} \qquad P_1 = \frac{\partial M_3}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial z} - \frac{1}{c} \lambda . E_1$$

$$\text{(b)} \qquad P_2 = \frac{\partial M_1}{\partial z} - \frac{\partial M_3}{\partial x} - \frac{1}{c} \lambda E_2$$

$$\text{(c)} \qquad P_3 = \frac{\partial M_2}{\partial x} - \frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{1}{c} \lambda E_3,$$

i każda z tych trzech składowych ma być *skończona*.

Ponieważ osie spółrzędnych y, z biegną w kierunkach stycznych do powierzchni granicznej, przeto, $\frac{\partial M_3}{\partial y}, \frac{\partial M_2}{\partial z}, \frac{\partial M_1}{\partial z}, \frac{\partial M_1}{\partial y}$ są w każdym razie skończone; równanie więc (*a*) niczego nas w danej sprawie nie uczy. Pozostają więc tylko równania (*b*) i (*c*), z których wobec powyższej uwagi wynika, że wielkości

$$m = \frac{\partial M_3}{\partial x} + \frac{1}{c}\lambda E_2, \quad n = \frac{\partial M_2}{\partial x} - \frac{1}{c}\lambda E_3$$

są *skończone.*

Uciekając się, jak poprzednio, do „warstwy przejściowej“ i nie czyniąc tymczasem żadnych założeń co do λE_2, λE_3, otrzymalibyśmy stąd

$$\int_0^\delta m\,dx = \int_0^\delta \frac{\partial M_3}{\partial x}\,dx + \frac{1}{c}\int_0^\delta \lambda E_2 . dx,$$

a przechodząc do granicy, dla $\delta = 0$, ze względu na skończoność m:

$$\begin{cases} M'_3 - M_3 = -\frac{1}{c}\,\mathrm{Lim}\int_0^\delta \lambda E_2 . dx, \\ \text{i podobnie:} \\ M'_2 - M_2 = \frac{1}{c}\,\mathrm{Lim}\int_0^\delta \lambda E_3 dx. \end{cases}$$

Jeżeli dopuścimy, w warstwie przejściowej, wartości *nieskończenie wysokie* wielkości λE_2, λE_3, natenczas wartości graniczne powyższych całek będą wogóle *różne od zera*, powiedzmy

$$(59) \qquad \mathrm{Lim}\int_0^\delta \lambda E_2 . dx = S_2 \quad , \quad \mathrm{Lim}\int_0^\delta \lambda E_3 dx = S_3,$$

tak iż mielibyśmy

$$(60) \qquad \begin{cases} M'_3 - M_3 = -\frac{1}{c} S_2 \\ M'_2 - M_2 = \frac{1}{c} S_3, \end{cases}$$

t. j. składowa *styczna* siły magnetycznej doznawałaby *skoku* przy przejściu od jednego do drugiego półprzewodnika. Zauważmy jednak, że skok ten byłby *nieokreślony*, albowiem wartości S_2, S_3 zależą od tego, za pomocą *jakiej* funkcyi x-a wyrażamy λE_2, λE_3 wewnątrz warstwy przejściowej (hypotetycznej), t. j. w odcinku od $x = 0$ do $x = \delta$. O skoku określonym mogłaby wówczas tylko być mowa, gdyby ktoś przepisał nam z góry same wartości S_2, S_3. Wektor $\mathbf{S} = \mathbf{j}S_2 + \mathbf{k}S_3$, styczny do powierzchni granicznej, można-

by zresztą nazwać *prądem elektrycznym powierzchniowym* (przewodzonym); wektor $\mathbf{j}(M'_2 - M_2) + \mathbf{k}(M'_3 - M_3)$, również styczny do tej powierzchni, byłby, według (60), prostopadłym do wektora **S**.

Jeżeli jednak wykluczymy zupełnie i raz na zawsze wszelkie nieskończone wartości **E**, a przynajmniej $\lambda\mathbf{E}$ (co, o ile wiem, czynią wszyscy teoretycy), natenczas będzie $S_2 = o$, $S_3 = o$, a więc $M'_3 = M_3$, $M'_2 = M_2$, t. j. *składowa styczna siły magnetycznej będzie ciągła na granicy dwóch półprzewodników*, zupełnie tak samo jak dla doskonałych izolatorów.

— Modyfikacyę tego twierdzenia, niezbędną np. dla tak zwanych magnesów trwałych, poznamy w ciągu dalszym, przy rozważaniu sił magnetycznych „przyłożonych".

§ 22. Podstawiając w równaniach ogólnych (A), (B) za prąd elektryczny **p** i magnetyczny **q** wyrazy (24) i (25), § 9, otrzymamy równania różniczkowe *dla środowiska ruchomego doskonale izolującego*:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v}.\mathrm{div}\,\mathbf{D} + \mathrm{curl}\,V\mathbf{D}\mathbf{v} = c.\mathrm{curl}\,\mathbf{M}$$

$$\mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathrm{curl}\,V\mathbf{B}\mathbf{v} = -\,c.\mathrm{curl}\,\mathbf{E},$$

czyli:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{(Ib)} & \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} = c.\mathrm{curl}\,(\mathbf{M} - \mathbf{M}') \\ \text{(IIb)} & \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\,c.\mathrm{curl}\,(\mathbf{E} - \mathbf{E}'), \end{array}\right.$$

gdzie $\rho = \mathrm{div}\,\mathbf{D}$, jak zwykle, i gdzie $\mathbf{E}'$, $\mathbf{M}'$ oznaczają wektory określone przez:

$$\text{(b)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{E}' = -\dfrac{1}{c}\,V\mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{M}' = +\dfrac{1}{c}\,V\mathbf{D}\mathbf{v}, \end{array}\right.$$

a więc normalne do płaszczyzn: (**B**,**v**) względnie (**D**,**v**).

Oprócz tego mamy, jak poprzednio:

$$\text{(IIIb)} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = o.$$

Jeżeli dane są K i μ oraz prędkość ruchu **v** dla wszystkich punktów środowiska i dla wszelkich czasów, mamy w (Ib) i (IIb) *dwa* równania różniczkowe cząstkowe, I-go rzędu ze względu na czas *t, dla dwóch wektorów* **E**, **M**; wektory $\mathbf{E}'$, $\mathbf{M}'$ są bowiem, według (b), jednoznacznie określone przez **v**,**D**,**B** a więc też ostatecznie przez **v**, **E**, **M**.

Jak widzimy z (Ib), (IIb), wektory $\mathbf{E}'$, $\mathbf{M}'$ mają znaczenia: siły elektrycznej, względnie siły magnetycznej. Pierwsza z nich jest normalna do linij polaryzacyi magnetycznej, druga — do linij polaryzacyi elektrycznej, obie zaś są oprócz tego normalne do kierunku ruchu rozważanego elementu ciała dielektrycznego. Natężenie $\mathbf{E}'$ i $\mathbf{M}'$ jest proporcyonalne do stosunku prędkości $v:c$, do $\mathbf{B}$, względnie do $\mathbf{D}$ i wreszcie — do wstawy kąta $(\mathbf{B}, \mathbf{v})$, względnie $(\mathbf{D}, \mathbf{v})$. Oprócz tego widzimy z równań (b), że, jeżeli ruch elementu odbywa się w kierunku osi $\mathbf{i}$, zaś $\mathbf{B}$ posiada np. kierunek $\mathbf{j}$, siła $\mathbf{E}'$ posiada kierunek $\mathbf{k}$; jeżeli, przy tym że kierunku ruchu, $\mathbf{D}$ wskazuje w kierunku $\mathbf{j}$, siła $\mathbf{M}'$ będzie miała kierunek — $\mathbf{k}$.

Ponieważ, jak już wspomniałem wyżej, *curl* $\mathrm{V}\mathbf{D}\mathbf{v}$, *curl* $\mathrm{V}\mathbf{B}\mathbf{v}$ są już same przez się solenoidalne, przeto wektory $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ są też solenoidalne po odtrąceniu tych wektorów. Odtąd też, idąc za powszechnym zwyczajem, nazywać będę *prądem elektrycznym* w środowisku ruchomym to, co według naszego oznaczenia byłoby równe

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathrm{curl}\,\mathrm{V}\mathbf{D}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{D}} + \rho\mathbf{v}\ (+ \lambda\mathbf{E} \text{ dla przewodników}) \tag{61}$$

i podobnie *prądem magnetycznym* wektor

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} - \mathrm{curl}\,\mathrm{V}\mathbf{B}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{B}}. \tag{62}$$

Posługując się tak określonemi prądami, możemy (Ib), (IIb) napisać:

$$\mathbf{p}' = \mathrm{c.curl}\,(\mathbf{M} - \mathbf{M}') \tag{Ib'}$$

$$\mathbf{q}' = -\,\mathrm{c.curl}\,(\mathbf{E} - \mathbf{E}'); \tag{IIb'}$$

równania te są zupełnie analogiczne do równań

$$\mathbf{p} = \mathrm{c.curl}\,\mathbf{M},\quad \mathbf{q} = -\,\mathrm{c.curl}\,\mathbf{E}$$

dla środowiska nieruchomego (dla którego jest oczywiście $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, $\mathbf{q}' = \mathbf{q}$); zachodzi ta tylko różnica, że dla środowiska ruchomego należy od sił $\mathbf{E}$. $\mathbf{M}$ *odtrącić* (w *curl*'ach) wektory $\mathbf{E}'$. $\mathbf{M}'$.

W najściślejszym związku z tą właśnie okolicznością *Heaviside* *) zalicza też między innemi, wektory $\mathbf{E}'$, $\mathbf{M}'$ do „sił przyłożonych“; z ogólnem pojęciem sił takich zapoznamy się później dopiero.

§ 23. Stosując do równania (IIb) operacyę *div*, mamy $\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\mathbf{M} = 0$, co jednak wobec założonej raz na zawsze własności (IIIb) nie daje nam nic nowego.

*) *Electromagnetic Theory*, Tom I, § 39. Autor ten nazywa zresztą $\mathbf{E}'$ „*the motional electric force*“, zaś $\mathbf{M}'$ — „*the motional magnetic force*“.

Stosując operacyę tę do (Ib), otrzymamy natomiast

$$\operatorname{div} \mathbf{p} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

czyli, według § 9: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, lub też jeszcze, według (27), i rozumiejąc przez $d\tau$ indywidualny element dielektryka:

$$\frac{d}{dt} (\rho . d\tau) = 0. \tag{63}$$

Ładunek elektryczny $e = \rho . d\tau$ jest więc *niezmiennikiem* każdego *elementu indywidualnego doskonałego izolatora ruchomego*, t. j. porusza się w przestrzeni wraz z tym elementem materyalnym i jest z nim niezmiennie i nierozerwalnie połączony, niebacząc na jego ustawiczne zmiany objętości i ciągłe odkształcenia.

§ 24. Własność *superpozycyi* przysługuje polom elektromagnetycznym w środowisku ruchomym (nieinaczej jak w spoczywającym), byle tylko pola składowe odpowiadały jednej i tej samej prędkości $\mathbf{v}$ przepisanej jako funkcya czasu i przestrzeni. Aby się o tem przekonać, wystarcza rzut oka na równania (Ib), (IIb). Różniczkowanie atoli, przestrzenne lub czasowe, całek tych równań nie daje już nam wogóle całek tychże równań, jak dla środowiska nieruchomego; wektor bowiem $\mathbf{v}$, w równaniach (Ib), (IIb) może wogóle zmieniać się w czasie i w przestrzeni.

§ 25. Dla *półprzewodnika ruchomego* równanie (IIb) pozostaje bez zmiany, podobnie jak (III); zamiast równania (Ib) mamy natomiast, według § 10 i według wzoru ogólnego (A):

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} + \lambda \mathbf{E} = c . \operatorname{curl} (\mathbf{M} - \mathbf{M}'), \tag{Ic}$$

gdzie $\mathbf{M}' = \frac{1}{c} V \mathbf{D} \mathbf{v}$, zupełnie jak dla izolatora; jedyna różnica polega na dodatkowym wyrazie $\lambda \mathbf{E}$.

Przez zastosowanie operacyi *div* otrzymamy tym razem $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ $+ \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} + \lambda \mathbf{E}) = 0$, t. j. $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div}(\lambda \mathbf{E}) = 0$, czyli ostatecznie — zamiast równania (63):

$$(64) \qquad \frac{d}{dt}(\rho d\tau) + d\tau . \operatorname{div}(\lambda \mathbf{E}) = 0.$$

Interpretacya wzoru tego będzie takaż sama jak w § 18, dla wzoru (47), z tą tylko różnicą, że obecnie chodzi o elementy *indywidualne* półprzewodnika i o zachodzące wewnątrz nich zmiany, nie zaś o elementy przestrzeni i zmiany „lokalne“.

Całki symboliczne dla środowiska nieruchomego.

§ 26. Dla *doskonale izolującego* dielektryka nieruchomego mieliśmy równania różniczkowe

$$(42) \quad K \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c.\operatorname{curl} \mathbf{M}, \quad \mu \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = - c.\operatorname{curl} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div}(\mu \mathbf{M}) = 0.$$

Jeżeli dielektryk jest *izotropowy*, K i μ są zwykłemi spółczynnikami skalarnemi. W tym wypadku możemy z powyższych równań różniczkowych wyrugować łatwo, bądź $\mathbf{E}$, bądź też $\mathbf{M}$.

Różniczkując pierwsze równanie ze względu na czas i mnożąc przez μ, mamy, według drugiego równania:

$$\frac{K\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = - \mu \operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \mathbf{E}\right)$$

i podobnie, przez różniczkowanie drugiego równania:

$$\frac{K\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} = - K \operatorname{curl}\left(\frac{1}{K} \operatorname{curl} \mathbf{M}\right).$$

(Równania te zresztą zachodzą też dla ciała krystalicznego, lecz wówczas treść ich jest zawilsza, o ile mianowicie K, μ są *operatorami* wektorowemi liniowemi, zaś $\frac{1}{K}$, $\frac{1}{\mu}$ operatorami odwrotnemi.)

Jeżeli dielektryk jest też *jednorodny*, mamy:

$$\mu.\mathrm{curl}\left(\frac{1}{\mu}\ \mathrm{curl}\ \mathbf{E}\right) = \mathrm{curl}^2\,\mathbf{E},\quad K\ \mathrm{curl}\left(\frac{1}{K}\ \mathrm{curl}\ \mathbf{M}\right) = \mathrm{curl}^2\,\mathbf{M},$$

a więc, oznaczając przez $\mathfrak{v}$ wielkość skalarną $\frac{c}{+\sqrt{K\mu}}$ (która, jak już wiemy, wyraża pewną *prędkość*):

$$(65)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mathfrak{v}^2.\mathrm{curl}^2\,\mathbf{E} \\ \dfrac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial t^2} = -\mathfrak{v}^2.\mathrm{curl}^2\,\mathbf{M}. \end{cases}$$

Każdy z wektorów **E**, **M** czyni więc zadość równaniu różniczkowemu II-go rzędu ze względu na czas:

$$(66)\qquad \frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial t^2} = -\,\mathfrak{v}^2.\mathrm{curl}^2\,\mathbf{R}.$$

Gdybyśmy w równaniu tem mieli zamiast operatora $\mathfrak{v}^2 curl^2$ zwykły spółczynnik skalarny k^2 *niezależny od czasu*, lecz zresztą wogóle zależny od położenia w przestrzeni (a *curl* jest właśnie operatorem czysto *przestrzennym*), natenczas najogólniejszą jego całką byłoby

$$\mathbf{R} = \cos(kt).\mathbf{F} + \sin(kt).\mathbf{G},$$

gdzie **F**, **G** oznaczałyby dowolne funkcye położenia, zaś *cos* i *sin* zwykłe funkcye trygonometryczne argumentu kt.

Otóż, nie bacząc na to, że $\mathfrak{v}.curl$ nie jest wielkością, lecz operatorem (zaś $\mathfrak{v}^2 curl^2$—jego iteracyą), możemy napisać całkę ogólną naszego równania *symbolicznie*:

$$(67)\qquad \mathbf{R} = \{\cos(\mathfrak{v}t\ \mathrm{curl})\}\,\mathbf{F} + \{\sin(\mathfrak{v}t\ \mathrm{curl})\}\,\mathbf{G},$$

gdzie { } są pewnemi *operatorami* złożonemi, które należy zastosować do wektorowych funkcyj położenia **F**, **G**, dowolnych, lecz niezależnych już od czasu *t*. Znaczenie tych operatorów możemy zresztą określić zupełnie niezależnie od wszelkich pojęć trygonometrycznych, a mianowicie za pomocą szeregów utworzonych ze znanego już nam operatora *curl* i jego iteracyj:

$$\{\cos(\mathfrak{v}t\ \mathrm{curl})\}\,\mathbf{F} = \left\{1 - \frac{\mathfrak{v}^2t^2}{2!}\,\mathrm{curl}^2 + \frac{\mathfrak{v}^4t^4}{4!}\,\mathrm{curl}^4 - \ldots.\right\}\mathbf{F},$$

czyli symbolicznie, opuszczając domyślny wektor, na którym należy operować:

$$(68)\quad \left\{\cos\,(\mathfrak{v}t.\mathrm{curl})\right\} = \left\{1 - \frac{1}{2!}(\mathfrak{v}t.\mathrm{curl})^2 + \frac{1}{4!}(\mathfrak{v}t.\mathrm{curl})^4 - \ldots.\right\}$$

i podobnie

$$(69)\quad \left\{\sin\,(\mathfrak{v}t.\mathrm{curl})\right\} = \left\{\mathfrak{v}t\ \mathrm{curl} - \frac{1}{3!}(\mathfrak{v}t.\mathrm{curl})^3 + \frac{1}{5!}(\mathfrak{v}t.\mathrm{curl})^5 - \ldots.\right\}$$

Przy *tem* określeniu należy oczywiście założyć, że szeregi wyników operacyj wykonanych na **F**, względnie na **G**, są *zbieżne*, przynajmniej w pewnych granicach czasu t, czyli dla pewnej epoki; wówczas bowiem tylko wektor **R** będzie istotnie określony jednoznacznie przez wzór (67) dla tejże epoki, przy danych **F**, **G**.

Zauważmy tu jeszcze, że prawomocność wzoru (67) i wszelkich wynikających zeń wniosków opiera się zasadniczo na *rozdzielnościowości* operatora *curl* i na wypływającej stąd *przemiennościowości* operatorów $\frac{\partial}{\partial t}$ i *curl* *).

Ponieważ zarówno **E**, jakoteż **M**, czynią zadość równaniu (66), przeto wzorując się na (67) i rozumiejąc przez **F**, **G**, **H**, **I** cztery funkcye wektorowe samego położenia w przestrzeni, tymczasem zupełnie dowolne, możemy położyć:

$$(70)\quad \begin{cases} \mathbf{E} = \left\{\cos\,(\mathfrak{v}t.\mathrm{curl}\right\}\mathbf{F} + \left\{\sin\,(\mathfrak{v}t.\mathrm{curl})\right\}\mathbf{G} \\ \mathbf{M} = \left\{\cos\,(\mathfrak{v}t.\mathrm{curl})\right\}\mathbf{H} + \left\{\sin\,(\mathfrak{v}t.\mathrm{curl})\right\}\mathbf{I}. \end{cases}$$

Aby jednak uczynić zadość pierwotnym równaniom I-go rzędu:

$K\dot{\mathbf{E}} = c.\mathrm{curl}\,\mathbf{M}$, $\mu\dot{\mathbf{M}} = -c.\mathrm{curl}\,\mathbf{E}$ [a nietylko równaniom II-go rzędu (65)], nie możemy wszystkich czterech funkcyj położenia **F**, ... **I** obrać dowolnie, lecz tylko *dwie*, np. **F**, **G**; dwie pozostałe zaś będą już określone przez **F**, **G**.

---

*) Porówn. rozprawę p. tyt. „Teorya operatorów fizycznych“, *Przegląd Filozoficzny*, 1902—3.

Istotnie, podstawiając wyrazy (70) do tych równań pierwotnych i uwzględniając, że

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\cos\ (\mathfrak{v}.t.\mathrm{curl})\right\}\mathbf{F} = -\mathfrak{v}\,\mathrm{curl}\left\{\sin\ (\mathfrak{v}t.\mathrm{curl})\right\}\mathbf{F} = -\mathfrak{v}\left\{\sin\right\}\mathrm{curl}\ \mathbf{F}$$

i podobnie dla $\frac{\partial}{\partial t}\left\{\sin\right\}$ —, zupełnie tak samo, jak gdyby chodziło o zwykłe funkcye trygonometryczne *), — otrzymamy łatwo:

$$\mathbf{H} = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2}\mathbf{G}, \quad \mathbf{I} = -\left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2}\mathbf{F}.$$

Rozwiązania symboliczne (70) przybierają więc kształt:

$$(71)\quad \begin{cases} \mathbf{E} = \left\{\cos\ (\mathfrak{v}\ t\mathrm{curl})\right\}\mathbf{F} + \left\{\sin\ (\mathfrak{v}t\ \mathrm{curl})\right\}\mathbf{G} \\ \mathbf{M} = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2}\left\{\cos\ (\mathfrak{v}t\ \mathrm{curl})\right\}\mathbf{G} - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2}\left\{\sin\ (\mathfrak{v}t\ \mathrm{curl})\right\}\mathbf{F}. \end{cases}$$

Jeżeli dany jest *stan początkowy* pola elektromagnetycznego, t. j.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0,\ \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 \qquad \text{dla } t = 0,$$

możemy natychmiast wyznaczyć pozostałe jeszcze dwie nieokreślone funkcye $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$. Istotnie, kładąc w (71) $t = 0$, mamy

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{F},\ \mathbf{M}_0 = \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2}\mathbf{G},$$

a więc ostatecznie:

$$(72)\quad \begin{cases} \mathbf{E} = \left\{\cos\ (\mathfrak{v}t\ \mathrm{curl})\right\}\mathbf{E}_0 + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2}\left\{\sin\ (\mathfrak{v}t\ \mathrm{curl})\right\}\mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M} = \left\{\cos\ (\mathfrak{v}t\ \mathrm{curl})\right\}\mathbf{M}_0 - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2}\left\{\sin\ (\mathfrak{v}t\ \mathrm{curl})\right\}\mathbf{E}_0 \end{cases}$$

---

*) Co można natychmiast sprawdzić, uciekając się do określeń (68) i (69), przy nieodzownem założeniu zbieżności szeregów.

jako rozwiązanie symboliczne równań $K\dot{\mathbf{E}} = c.curl\,\mathbf{M}$, $\mu\dot{\mathbf{M}} = -c.curl\,\mathbf{E}$, *odpowiadające danemu stanowi początkowemu* *).

Czytelnik sprawdzi natychmiast, że czynią im one zadość identycznie i że dla $t = 0$ dają $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$, jak być powinno.

Podkreślam występującą tu wyraźnie spółzależność sił elektrycznych i magnetycznych; we wzorach (72) przeszłość lub przyszłość elektryczna ($t < 0$ lub $t > 0$) jest wyrażona przez teraźniejszość elektryczną i magnetyczną ($t = 0$), a to samo dotyczy przeszłości i przyszłości magnetycznej.

§ 27. Rozwiązania (72) czynią zadość danym warunkom początkowym i pierwszym dwóm równaniom (42); co do trzeciego równania, t. j. $\operatorname{div}(\mu\mathbf{M}) = 0$, a w naszym wypadku, dla dielektryka izotropowego i jednorodnego:

$$\operatorname{div}\mathbf{M} = 0,$$

to będzie ono spełnione dla *wszelkich* czasów t, jeżeli tylko jest spełnione dla $t = 0$, t. j. w stanie początkowym.

Istotnie, stosując operacyę *div* i uwzględniając, że $div\,curl\,\mathbf{R} = 0$ i wogóle $div\,curl^n\,\mathbf{R} = 0$ (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$), otrzymamy według (68) i (69) dla dowolnego wektora $\mathbf{R}$:

$$\operatorname{div}\left\{\cos(\mathfrak{v}t\ curl)\right\}\mathbf{R} = \operatorname{div}\mathbf{R},$$

$$\operatorname{div}\left\{\sin(\mathfrak{v}t\ curl)\right\}\mathbf{R} = 0,$$

a więc według drugiego równania (72):

$$\operatorname{div}\mathbf{M} = \operatorname{div}\mathbf{M}_0 = 0.$$

Podobnie też otrzymamy z pierwszego równania (72):

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}\mathbf{E}_0,$$

t. j. bezpośredni wyraz niezmienności ładunku elektrycznego w każdym elemencie izolatora, co już poprzednio na innej okazaliśmy drodze. (W naszym wypadku ze stałości ładunku pozornego wynika bezpośrednio stałość ładunku prawdziwego: $\operatorname{div}\mathbf{D} = K\operatorname{div}\mathbf{E} = K.\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = const.$, albowiem jest tu mowa o dielektryku *izotropowym i jednorodnym*; z warunku $div\,\mathbf{M}_0 = 0$ wynika też bezpośrednio $div\,\mathbf{B} = \mu.div\,\mathbf{M} = 0$).

*) Wzory te wyprowadziłem na formalnie odmiennej drodze w rozprawie p. t. „*Symbolische Integrale* etc.“, Annal. d. Physik, T. 6. 1901, str. 373 — 397. Przekonałem się zresztą niebawem, że *Heaviside* podał je znacznie wcześniej (zarówno dla izolatorów jakoteż dla półprzewodników) bez dowodu i bez wszelkich bliższych objaśnień; patrz autora tego „*Electrical Papers*“.

§ 28. Z rozwiązań symbolicznych (72) możemy łatwo wyprowadzić pewne godne uwagi i dość ogólne wnioski.

Jeżeli $v t$ *curl* zmienia znak, np. wskutek tego, że wzięto $-t$ zamiast $+t$, mamy [chociażby według określeń (68), (69) naszych operatorów złożonych]:

$$\left\{\cos\left(-tv\,\mathrm{curl}\right)\right\} = \left\{\cos\left(tv\,\mathrm{curl}\right)\right\}$$

$$\left\{\sin\left(-tv\,\mathrm{curl}\right)\right\} = -\left\{\sin\left(tv\,\mathrm{curl}\right)\right\}.$$

Rozważając więc dwie chwile $+t$ i $-t$ równoodległe od $t = 0$, jedną w przyszłości, drugą w przeszłości, otrzymamy, według (72):

$$(73)\quad \begin{cases} \mathbf{E}(t) + \mathbf{E}(-t) = 2\left\{\cos\left(vt\,\mathrm{curl}\right)\right\}\mathbf{E}_0 \\ \mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(-t) = 2\left\{\cos\left(vt\,\mathrm{curl}\right)\right\}\mathbf{M}_0 \\ \mathbf{E}(t) - \mathbf{E}(-t) = 2\left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2}\left\{\sin\left(vt\,\mathrm{curl}\right)\right\}\mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}(t) - \mathbf{M}(-t) = -2\left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2}\left\{\sin\left(vt\,\mathrm{curl}\right)\right\}\mathbf{E}_0, \end{cases}$$

związki dające się łatwo wyrazić słowami.

Dalej, z określeń naszych operatorów wynika

$$\left\{\cos(0)\right\} = 1, \quad \left\{\sin(0)\right\} = 0,$$

zarówno dla $t = 0$ jak dla *curl* $= 0$, t. j. gdy rozmieszczenie odpowiedniego wektora jest irotacyjne.

Jeżeli więc w stanie początkowym pole $\mathbf{E}_0$ jest *irotacyjne*, $\mathbf{M}_0$ zaś dowolne, mamy dla każdego t:

$$(74)\quad \begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2}\left\{\sin vt\,\mathrm{curl}\right\}\mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M} = \left\{\cos\left(vt\,\mathrm{curl}\right)\right\}\mathbf{M}_0; \end{cases}$$

jeżeli natomiast pole magnetyczne $\mathbf{M}_0$ jest irotacyjne, zaś $\mathbf{E}_0$ dowolne, natenczas mamy dla każdego t:

$$(75)\quad \begin{cases} \mathbf{E} = \left\{\cos\left(vt\,\mathrm{curl}\right)\right\}\mathbf{E}_0, \\ \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 - \left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2}\left\{\sin\left(vt\,\mathrm{curl}\right)\right\}\mathbf{E}_0. \end{cases}$$

W pierwszym wypadku wszystko, co jest zmienne z czasem, zależy jedynie od pola $\mathbf{M}_0$, w drugim zaś jedynie od pola $\mathbf{E}_0$. W pierwszym wypadku mamy, według (73):

$$\mathbf{E}(t) + \mathbf{E}(-t) = 2\,\mathbf{E}_0 \tag{76}$$

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(-t), \tag{77}$$

w drugim zaś wypadku:

$$\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(-t), = 2\,\mathbf{M}_0 \tag{78}$$

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(-t), \tag{79}$$

co nietrudno wyrazić słowami.

§ 29. *Jeżeli wreszcie zarówno* $\mathbf{E}_0$ *jak i* $\mathbf{M}_0$ *są irotacyjne*, t. j. jeżeli *curl* $\mathbf{E}_0 = curl\ \mathbf{M}_0 = o$. natenczas mamy

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_0,\ \mathbf{M}_t = \mathbf{M}_0 \text{ } dla\ każdego\ t,$$

w ciągu całej rozważanej epoki ciągłości i stosowalności równań różniczkowych pola, którą krótko możemy nazwać „*epoką*“. Innemi słowy:

> Wszelkie rozmieszczenie *irotacyjne* sił elektrycznych i magnetycznych *trwa niezmiennie*, czyli stanowi pole *statyczne*.

Dokładniej: Jeżeli rozmieszczenie wektorów $\mathbf{E}$ i $\mathbf{M}$ w dowolnej części pola jest irotacyjne w jednej chociażby chwili, natenczas ta część pola była i będzie zawsze niezmienną dla wszelkich czasów, które wraz z ową chwilą należą *do jednej i tej samej „epoki“*. Krócej: Irotacyjność $\mathbf{E}$ i $\mathbf{M}$ w jednej chociażby chwili takiej epoki jest warunkiem wystarczającym niezmienności danej dziedziny pola elektromagnetycznego w ciągu całej tej epoki.

Że warunek ten jest również *niezbędnym*, wynika to z samych równań różniczkowych $K\dot{\mathbf{E}} = c.curl\ \mathbf{M}$, $\mu\,\dot{\mathbf{M}} = -\,c.curl\ \mathbf{E}$.

W szczególności, dla $\mathbf{E}_0 = \mathbf{M}_0 = o$ wynika z naszych rozważań, że ani pole elektryczne, ani pole magnetyczne, ani też elektromagnetyczne, wirowe czy też irotacyjne, nie mogą być stworzone w żadnej chwili takiej „epoki“, że więc stworzenie ich (lub też zniszczenie) implikuje koniecznie pogwałcenie owych równań różniczkowych lub też warunków ciągłości, stanowiąc tym sposobem „katastrofę“, czyli koniec jednej lub ewentualnie początek innej epoki, w danej dziedzinie przestrzeni. W chwili takiej mogą odbyć się zdarzenia zgoła nieobjęte temi równaniami różniczkowemi.

Tym sposobem, zakładając *curl* $\mathbf{E}_0 = o$, *curl* $\mathbf{M}_0 = o$, będzie-

my mogli przejść od naszych wzorów ogólnych do pól *statycznych* i zobaczymy, jak z ich irotacyjności wynika bezpośrednio istnienie potencyału sił i jak odpowiednie pola mogą być przedstawione jako pochodzące od „działania na odległość“, według prawa odwrotnych kwadratów, „elektryczności“ i „magnetyzmów“ (pozornych).

§ 30. Wzory ogólne (72) upraszczają się, i ze symbolów mianowicie stają się konkretnemi rozwiązaniami równań różniczkowych, w pewnym szczególnym wypadku, któremu warto poświęcić słów kilka.

Dzieje się to wówczas, gdy stan początkowy pola jest taki, iż

$$\text{(80)} \qquad \operatorname{curl} \mathbf{E}_0 = \alpha.\mathbf{E}_0, \quad \operatorname{curl} \mathbf{M}_0 = \beta.\mathbf{M}_0,$$

gdzie α i β oznaczają dowolne *stałe* skalarne.

Istotnie, wówczas mamy

$$\text{(81)} \qquad \operatorname{curl}^2 \mathbf{E}_0 = \operatorname{curl}(\alpha.\mathbf{E}_0) = \alpha \operatorname{curl} \mathbf{E}_0 = \alpha^2 \mathbf{E}_0,$$

podobnie $\operatorname{curl}^3 \mathbf{E}_0 = \alpha^3 \mathbf{E}_0$, i t. d., wogóle $curl^n \mathbf{E}_0 = \alpha^n \mathbf{E}_0$, i podobnie $curl^n \mathbf{M}_0 = \beta^n \mathbf{M}$, dla wszelkich n całkowitych i dodatnich, tak iż według określeń (68) i (69) operatory $\{cos\,(tv\ curl)\}$, $\{sin\,(vt\ curl\}$ stają się zwykłemi funkcyami trygonometrycznemi

$$\text{(82)} \qquad \cos(\alpha v t), \ \sin(\alpha v t) \text{ dla } \mathbf{E}_0$$

$$\text{(83)} \qquad \cos(\beta v t), \ \sin(\beta v t) \text{ dla } \mathbf{M}_0$$

i zwykłemi *czynnikami* (skalarnemi) tych wektorów.

Według (72) otrzymamy więc w tym wypadku natychmiast:

$$\text{(84)} \qquad \begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0.\cos(\alpha v t) + \left(\dfrac{\mu}{K}\right)^{1/2} \mathbf{M}_0.\sin(\beta v t) \\ \mathbf{M} = \mathbf{M}_0.\cos(\beta v t) - \left(\dfrac{K}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{E}_0.\sin(\alpha v t). \end{cases}$$

Pole to jest czysto solenoidalne, albowiem z (80) wynika $div\, \mathbf{E}_0 = \dfrac{1}{\alpha}\, div\, curl\, \mathbf{E}_0 = 0$ i podobnie $div\, \mathbf{M}_0 = 0$, a więc też dla wszelkich czasów $div\, \mathbf{E} = div\, \mathbf{M} = 0$.

Ponieważ stałe wektory $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{M}_0$ posiadają w danym punkcie kierunki wogóle *różne* od siebie, przeto według (84) — wektor $\mathbf{E}$ będzie podlegał nietylko zmianom swego natężenia ale też zmianom kierunku; to samo można powiedzieć o wektorze $\mathbf{M}$. Drgania tych wektorów będą się jednak odbywały zawsze w jednej i *tej samej płaszczyznie* ($\mathbf{E}_0$, $\mathbf{M}_0$) w danym punkcie pola; w różnych punktach płaszczyzny te będą oczywiście miały położenia wogóle różne, t. j. nie będą do siebie równoległe.

Załóżmy jeszcze

$$\beta = \alpha \tag{85}$$

i zbadajmy, dla tego szczególnego stanu początkowego, omawianą już niejednokrotnie wielkość skalarną $u = \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{MB})$, t. j. dla zajmującego nas tu środowiska izotropowego i jednorodnego:

$$u = \frac{1}{2}(K.E^2 + \mu.M^2), \tag{86}$$

a wyrażającą — jak zobaczymy później — gęstość energii elektromagnetycznej.

Według (85) otrzymamy z (84):

$$E^2 = E_0^2.\cos^2(\alpha\nu t) + \frac{\mu}{K} M_0^2 \sin^2(\alpha\nu t) +$$

$$+ 2\left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \mathbf{E}_0\mathbf{M}_0.\sin(\alpha\nu t).\cos(\alpha\nu t),$$

$$M^2 = M_0^2 \cos^2(\alpha\nu t) + \frac{K}{\mu} E_0^2 \sin(\alpha\nu t) -$$

$$- 2\left(\frac{K}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{E}_0\mathbf{M}_0.\sin(\alpha\nu t).\cos(\alpha\nu t),$$

a więc:

$$u = \frac{1}{2}(K.E_0^2 + \mu.M_0^2) = u_0 = \text{const.}, \tag{87}$$

t. j.: u będzie *niezmiennikiem dla każdego z osobna punktu pola* *). Stanowi to szczególny przywilej pola elektromagnetycznego, które rozwija się z rozważanego tu stanu początkowego.

Niezmienność u możemy sprawdzić na innej jeszcze drodze.

---

*) Podczas gdy przy *dowolnym* stanie początkowym u nie jest niezmiennikiem, lecz jest nim tylko całka $\int u d\tau$ obejmująca dziedzinę τ, dla której powierzchni σ jest zachowany warunek $\int \mathbf{F}_\nu d\sigma = 0$, dla wszelkich t, gdzie $\mathbf{F} = c\,\mathbf{VEM}$; porównaj § 14.

Stosując operacyę *curl* do wzorów (84) i zakładając $\beta = \alpha$, otrzymamy:

$$\text{curl } \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}_0 . \cos(\alpha v t) + \left(\frac{\mu}{K}\right)^{1/2} \alpha \mathbf{M}_0 \sin(\alpha v t),$$

czyli:

(88) $$curl\ \mathbf{E} = \alpha . \mathbf{E} \text{ i podobnie } curl\ \mathbf{M} = \alpha . \mathbf{M}.$$

Widzimy przedewszystkim, że własność początkowa $curl\ \mathbf{E}_0 = \alpha . \mathbf{E}_0$, $curl\ \mathbf{M}_0 = \alpha . \mathbf{M}_0$ zostaje zachowana po wsze czasy, t. j. dla całej epoki. Następnie zaś wynika z (88)

$$\mathbf{E} . \text{curl } \mathbf{M} - \mathbf{M} . \text{curl } \mathbf{E} = 0,$$

czyli

$$\text{div } V\mathbf{E}\mathbf{M} = 0,$$

t. j. *solenoidalność* wektora $\mathbf{F} = cV\mathbf{E}\mathbf{M}$ *), a jednocześnie, według (38), § 14:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

co było do okazania.

§ 31. Na pierwszy już rzut oka widzimy, że we wzorach (72) przyszłość i przeszłość elektromagnetyczna każdego elementu przestrzeni jest wyrażona przez teraźniejszość, czyli stan „początkowy“ $(\mathbf{E}_0, \mathbf{M}_0)$ *tegoż elementu* **), niezależnie od tego, co zachodzi lub zachodziło w innych, skończenie odległych dziedzinach przestrzeni. Dzięki tej właśnie okoliczności z wzorów tych nie można wyczytać rozchodzenia się (propagacyi) zaburzeń elektromagnetycznych w przestrzeni. Wybitną tę cechę zaburzeń okażemy później dopiero (Rozdz. VI), na innej zupełnie drodze.

§ 32. Dla *półprzewodnika* nieruchomego, izotropowego i jednorodnego mamy, według § 18, równania różniczkowe

(89) $$\begin{cases} K \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \lambda \mathbf{E} = c . \text{curl} \mathbf{M} \\ \mu \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = - c . \text{curl } \mathbf{E}. \end{cases}$$

---

*) który, jak zobaczymy, wyraża *prąd energii elektromagnetycznej*.

**) Powiadam *„elementu“*, zaś nie *punktu* przestrzeni, albowiem znajomość np. $\mathbf{E}_0$ w jednym tylko punkcie geometrycznym nie pozwala na wykonanie operacyi *curl*; aby ją wykonać należy znać rozmieszczenie $\mathbf{E}_0$ w pewnej, acz dowolnie małej, *dziedzinie trójwymiarowej* zawierającej dany punkt.

gdzie K,μ,λ są stałe skalarne. (Oprócz tego mamy zwykły warunek solenoidalności **B**, który w naszym wypadku redukuje się do *div* **M** = o.)

Różniczkując pierwsze z równań (89) ze względu na t, mnożąc przez μ i podstawiając $\mu \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$ z drugiego równania, mamy

$$\frac{1}{c^2}\left(K\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial^2 t} + \mu\lambda \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\operatorname{curl}^2 \mathbf{E},$$

czyli, wprowadzając czas relaksacyjny

$$\tau = \frac{K}{\lambda}$$

i oznaczając tym razem

$$\frac{c}{\sqrt{K\mu}} \text{ przez } v' \text{ *)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -v'^2 . \operatorname{curl}^2 \mathbf{E}. \tag{90}$$

Podobnie też, wykonywając na drugiem równaniu (89) operacyę $\left(K \frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)$, otrzymamy, według pierwszego równania:

$$\mu\left(K \frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -c . \operatorname{curl}\left(K \frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) \mathbf{E} = -c^2 . \operatorname{curl}^2 \mathbf{M},$$

t. j. zupełnie to samo równanie co dla **E**:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -v'^2 . \operatorname{curl}^2 \mathbf{M}. \tag{91}$$

Obadwa więc wektory **E**, **M** czynią zadość jednemu i temu samemu równaniu różniczkowemu II-go rzędu ze względu na t:

---

*) Zaś nie przez v (jak dla izolatora), albowiem — jak zobaczymy później — wielkość $\frac{c}{\sqrt{K\mu}}$ posiada dla półprzewodnika odmienne nieco znaczenie fizyczne niż dla izolatora, a mianowicie *nie* wyraża dokładnie prędkości rozchodzenia się fal.

$$(92) \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = -\,\mathfrak{v}'^2.\mathrm{curl}^2\mathbf{R}.$$

Postępując podobnie jak dla izolatora, połóżmy symbolicznie

$$(93) \qquad \mathbf{R} = \left\{1 + \frac{tm}{1!} + \frac{t^2m^2}{2!} + \frac{t^3m^3}{3!} + \ldots\right\}\mathbf{R}_0 = \left\{e^{tm}\right\}\mathbf{R}_0,$$

gdzie $\mathbf{R}_0$ jest funkcyą wektorową samego tylko położenia w przestrzeni (tymczasem dowolną), e zasadą logarytmów naturalnych, zaś m — *operatorem* przestrzennym. Aby uczynić zadość równaniu (92) należy operator ten wyznaczyć z „równania kwadratowego“

$$(94) \qquad m^2 + \frac{1}{\tau}m = -\,\mathfrak{v}'^2.curl^2.$$

Ponieważ pierwiastki tego równania są

$$(95) \qquad \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\sqrt{\mathfrak{v}'^2\mathrm{curl}^2 - \frac{1}{4\tau^2}},$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$, przeto możemy napisać całkę ogólną równania (92)

$$(96) \qquad \mathbf{R} = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left[\left\{\cos(tp)\right\}\mathbf{F} + \left\{\sin(tp)\right\}\mathbf{G}\right],$$

gdzie **F**, **G** oznaczają wektorowe funkcje położenia (aż dotąd dowolne), zaś $\{\cos(tp)\}$, $\{\sin(tp)\}$ są operatorami zbudowanemi z czasu t i z operatora

$$(97) \qquad p = \sqrt{\mathfrak{v}'^2\mathrm{curl}^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$$

zupełnie tak samo jak poprzednio zbudowaliśmy operatory (68), (69) z operatora $\mathfrak{v}$ *curl* i z czasu t.

Ponieważ więc **E**, **M** czynią zadość, z osobna, temuż równaniu (92), połóżmy:

$$(98) \qquad \mathbf{E} = e^{-\frac{t}{2\tau}}.\left[\left\{\cos(tp)\right\}\mathbf{F} + \left\{\sin(tp)\right\}\mathbf{G}\right]$$

$$(99) \qquad \mathbf{M} = e^{-\frac{t}{2\tau}}.\left[\left\{\cos(tp)\right\}\mathbf{H} + \left\{\sin(tp)\right\}\mathbf{I}\right]$$

i postarajmy się wyznaczyć funkcye wektorowe położenia: **F, G, H, I** *tak*, aby uczynić zadość pierwotnym równaniom różniczkowym (89), czyli

$$\frac{K}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{\tau}\mathbf{E}\right)=\operatorname{curl}\mathbf{M},\quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}=-\operatorname{curl}\mathbf{E}, \tag{89'}$$

i danemu, dla $t=0$, stanowi początkowemu $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{M}_0$.

Różniczkując (98) ze względu na czas, mamy dla każdego t:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=-\frac{1}{2\tau}\mathbf{E}+e^{-\frac{t}{2\tau}}\cdot\left[\left\{p\cos(tp)\right\}\mathbf{G}-\left\{p\sin(tp)\right\}\mathbf{F}\right],$$

a więc dla $t=0$:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)_0=-\frac{1}{2\tau}\mathbf{E}_0+\left\{p\right\}\mathbf{G},$$

t. j. według (89')

$$\mathbf{G}=\left\{\frac{1}{p}\right\}\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{2\tau}\mathbf{E}\right]_0=\left\{\frac{1}{p}\right\}\left[\frac{c}{K}\operatorname{curl}\mathbf{M}_0-\frac{1}{2\tau}\mathbf{E}_0\right],$$

zaś wprost z (98), dla $t=0$:

$$\mathbf{F}=\mathbf{E}_0.$$

Podobnie też otrzymamy z (99) i uciekając się do drugiego z równań (89'):

$$\mathbf{H}=\mathbf{M}_0,$$

$$\mathbf{I}=\left\{\frac{1}{p}\right\}\left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}+\frac{1}{2t}\mathbf{M}\right]_0=\left\{\frac{1}{p}\right\}\left[\frac{1}{2\tau}\mathbf{M}_0-\frac{c}{\mu}\operatorname{curl}\mathbf{E}_0\right],$$

gdzie $\left\{\frac{1}{p}\right\}$ jest operatorem odwrotnym względem $\{p\}$ *).

Wprowadzając znalezione tym sposobem **F, G, H, I** do wzorów (98), (99), mamy wreszcie:

---

*) Posługuję się klamrą $\{\ \}$, aby uwydatnić, że chodzi o operator, nie zaś o zwykły czynnik; operator *odwrotny* jest wogóle wieloznaczny, podobnie jak $\{\sqrt{\omega}\}$ (gdzie $\{\omega\}$ jest operatorem jednoznacznym), a więc też sam operator p, według określenia (97); zobaczymy jednak wkrótce, że pomimo to wszelka wieloznaczność znika w ostatecznych wzorach naszych (100) dla **E, M**.

$$(100)\quad \begin{cases} \mathbf{E} = e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \left[\left\{ \cos(tp) - \frac{1}{2\tau} \frac{\sin(tp)}{p} \right\} \mathbf{E}_0 + \frac{c}{K} \left\{ \frac{\sin(tp)}{p} \right\} \operatorname{curl} \mathbf{M}_0 \right], \\ \mathbf{M} = e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot \left[\left\{ \cos(tp) + \frac{1}{2\tau} \frac{\sin(tp)}{p} \right\} \mathbf{M}_0 - \frac{c}{\mu} \left\{ \frac{\sin(tp)}{p} \right\} \operatorname{curl} \mathbf{E}_0 \right]. \end{cases}$$

We wzorach tych, podobnie jak w (72), pole elektromagnetyczne $\mathbf{E}$, $\mathbf{M}$ dla dowolnej chwili t (należącej do danej „epoki“) jest wyrażone przez stan początkowy $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{M}_0$.

Ponieważ $\left\{\cos(tp)\right\} = \left\{1 - \frac{1}{2!} t^2 p^2 + \ldots\right\}$, $\left\{\frac{\sin(tp)}{p}\right\} =$

$= \left\{t - \frac{t^3 p^2}{3!} + \frac{t^5 p^4}{5!} - \ldots\right\}$ zawierają *parzyste* tylko „potęgi“

czyli iteracye operatora p, t. j. $p^2 = v'^2 \operatorname{curl}^2 - \frac{1}{4\tau^2}$, p^4, p^6 i t. d.,

nie zaś samo $p = \sqrt{v'^2 \operatorname{curl}^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$, przeto wszystkie operacye

w tych dwóch wzorach są zupełnie jednoznacznie określone *), i każda z nich daje się wprost wykonać na polach wektorowych $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{M}_0$ określających stan początkowy w każdym z osobna elemencie przestrzeni.

Dla $\tau = \infty$, t. j. dla izolatora doskonałego, mamy

$$p = v' \operatorname{curl} = v \operatorname{curl} = \frac{c}{\sqrt{K\mu}} \operatorname{curl}, \quad e^{-\frac{t}{2\tau}} = 1,$$

tak iż wzory (100) redukują się do 72), jak być powinno.

Wogóle jednak, t. j. dla jakiegokolwiek $\tau = K/\lambda$, wzory (100) zawierają operator p^2, t. j.

$$(101)\qquad p^2 = v'^2 \operatorname{curl}^2 - \frac{1}{4\tau^2} = \frac{c^2}{K\mu} \operatorname{curl}^2 - \frac{\lambda^2}{4K^2},$$

oprócz samego *curl*'a.

---

*) O ile tylko dla danego stanu początkowego $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{M}_0$ istnieją wogóle określone wektory $curl\mathbf{E}_0$, $curl^2\mathbf{E}_0$ i t. d., $curl\mathbf{M}_0$, $curl^2\mathbf{M}_0$ i t. d., t. j. o ile wektory $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{M}_0$ dopuszczają wogóle odpowiednie pochodne przestrzenne.

Jeżeli rozmieszczenie początkowe sił elektrycznych i magnetycznych jest *irotacyjne*, t. j. jeżeli

$$\operatorname{curl} \mathbf{E}_0 = \operatorname{curl} \mathbf{M}_0 = 0,$$

operator p^2 redukuje się do zwykłego czynnika skalarnego:

$$p^2 = -\frac{1}{4\tau^2}, \tag{102}$$

tak iż z wzorów (100) otrzymujemy:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 . e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[\cos\left(i\frac{t}{2\tau}\right) + i \sin\left(i\frac{t}{2\tau}\right) \right] = \mathbf{E}_0 . e^{-\frac{t}{2\tau}} . e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{M}_0 . e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[\cos\left(i\frac{t}{2\tau}\right) - i \sin\left(i\frac{t}{2\tau}\right) \right] = \mathbf{M}_0 . e^{-\frac{t}{2\tau}} . e^{+\frac{t}{2\tau}},$$

t. j.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \mathbf{M}_t = \mathbf{M}_0 \end{array}\right\} \text{ dla } \operatorname{curl} \mathbf{E}_0 = \operatorname{curl} \mathbf{M}_0 = 0; \tag{103}$$

siła więc elektryczna spada ustawicznie i wszędzie proporcyonalnie do $e^{-\frac{t}{\tau}}$, podczas gdy siła magnetyczna pozostaje niezmienną; po upływie czasu dość długiego w porównaniu z czasem relaksacyjnym siła elektryczna staje się niedostrzegalną, i pozostaje tylko magnetyczna; takie są losy wszelkiego pola irotacyjnego w półprzewodniku.

ROZDZIAŁ III.

Energia i siły ponderomotoryczne.

Rozdział III.

Energia i siły ponderomotoryczne.

Uwagi ogólne i przykłady.

§ 33. Jeżeli jedynym wynikiem przejścia dowolnego układu ze stanu S do stanu „neutralnego“ S_0 jest wykonanie pracy P_{ss_0}, natenczas powiadamy, że układ ten zawiera, w stanie S, *energię* $U = P_{ss_0}$. Przez pracę możemy tu rozumieć w szczególności pracę mechaniczną, np. wznoszenie ciężarów z niższego poziomu na wyższy. Stan „neutralny“ układu można obrać zupełnie konwencyonalnie, raz na zawsze; zwykle jednak obiera się stan ten S_0 w taki sposób, aby praca P_{ss_0}, a więc też energia $U(S)$ posiadała dla każdego rzeczywiście osiągalnego stanu S wartość dodatnią, w granicy zaś zero. Skoro zgodzimy się na ogólną stosowalność t. zw. *zasady zachowania energii*, powyższe określenie energii nie będzie zależało od sposobu przejścia czyli od „drogi“ prowadzącej ze stanu S do stanu S_0, lecz tylko od samego stanu S (jeżeli uczyniliśmy wybór S_0 raz na zawsze), t. j. energia U będzie *jednowartościową funkcyą stanu układu*. Jeżeli układ przy przejściu ze stanu S do S_0, zamiast wykonywać pracę, wydziela np. pewną ilość ciepła Q, możemy również skorzystać z powyższego określenia energii, zakładając atoli, że skądinąd już znamy równoważnik mechaniczny ciepła; skoro Q jest wyrażone w „jednostkach mechanicznych“, możemy już wprost napisać $U = Q$. Toż samo stosuje się do najrozmaitszych wypadków, w których zamiast pracy otrzymujemy jakiekolwiek zmiany w otoczeniu układu, podczas jego przejścia ze stanu S do S_0.

Nie zagłębiam się tu zresztą w subtelności tego przedmiotu

zakładając, że czytelnik skądinąd już jest z pojęciem energii dobrze obeznany *).

Energia zmieniającego się układu będzie wogóle (acz niekoniecznie) zmieniać się również z czasem t; nie będzie ona jednak zależała *wyraźnie* od t, lecz tylko od chwilowych wartości tych wielkości, które określają stan układu. To właśnie wyrażamy już, mówiąc krótko, że energia układu jest *funkcyą jego stanu.*

§ 34. Powyższe określenie energii nie zawiera żadnych cech, na podstawie których moglibyśmy mówić w jakikolwiek rozumny sposób o *lokalizacyi*, czyli umiejscowieniu energii w przestrzeni. Aż dotąd bowiem energia układu nie jest dla nas niczem innem jak tylko pewną funkcyą wielkości określających jego stan, a więc—o ile wielkości te zmieniają się z czasem — funkcyą (niewyraźną) czasu, t. j, wielkością określoną ostatecznie dla każdej chwili *czasu*, lecz bezpośrednio nie mającą nic wspólnego z rozmieszczeniem w *przestrzeni.*

Pojęcie lokalizacyi energii bywa atoli częstokroć bardzo użytecznem, szczególniej w badaniach podobnych do tych, które nas tu zajmują. Dlatego też nie będzie bez korzyści, jeżeli porozumiemy się tutaj co do tego punktu nieco dokładniej **).

Uwzględniając jedynie tylko powyższe ogólne określenie energii, moglibyśmy postąpić sobie z jej lokalizacyą w sposób zupełnie dowolny, moglibyśmy wskazać energii danego układu dowolne miejsce w przestrzeni, zupełnie niezależne od położenia samego układu; nie miałoby to bowiem żadnego zgoła wpływu na wnioski dające wyprowadzić się ze samej wartości i ze zmian czasowych energii układu. Liczne atoli rozważania energietyczne przybierają postać konkretniejszą, skoro przy lokalizacyi energii uwzględniamy wyraźnie położenie samego układu w przestrzeni i wprowadzamy siedzibę każdej ilości energii w pewną zależność z częściami składowemi układu. Lecz z tem nawet ograniczeniem mielibyśmy wysoki jeszcze stopień swobody w umiejscowianiu energii. Aby bardziej jeszcze ją ograniczyć i zdecydować się na pewien zupełnie określony sposób lokalizacyi energii, nie możemy chyba nic lepszego uczynić, jak oprzeć decyzyę naszą na przykładach jaknajprostszych, w których pewien określony sposób umiejscowiania energii posiada już sankcyę ze strony powszechnego niemal zwyczaju i odzwierciedla się w utartych ogólnie sposobach wyrażania się.

---

*) Dla wypełnienia ewentualnych pod tym względem luk poleciłbym czytelnikowi najgoręcej dzieło *M. Plancka*, p. tyt. *Das Prinzip d. Erhaltung der Energie*, Lipsk, 1887.

**) Następujące uwagi o lokalizacyi energii zapożyczyłem, niemal dosłownie, z kursu mych wykładów wygłoszonych w uniwersytecie bolońskim w r. 1900—01, litografowanego p. tyt. „*Elettricitá e Magnetismo*“, Bologna, 1902—05, Litogr. Sauer & Barigazzi.

Niechaj ciało sztywne, wyjęte z pod wpływów ciążenia, porusza się z prędkością v czysto postępową; jako stan neutralny określmy stan spoczynku tego ciała względem pewnego innego ciała, jak np. względem kuli ziemskiej, do której odnosimy też ową prędkość v. Otóż, jeżeli M jest masą tego ciała, energia jego w dowolnej chwili t będzie $U = \frac{1}{2} M v^2$. Istotnie, mamy

$$U = -\int_v^0 M \frac{dv}{dt} v\,dt = \int_0^v \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2).\,dt = \frac{1}{2} M v^2.$$

„Gdzie znajduje się“ energia ta w danej chwili t? Przypisujemy ją samemu ciału, nazywając ją mianowicie „jego“ energią. Możemy przeto, w tym wypadku, powiedzieć, że energia U znajduje się tam, gdzie i samo ciało, i że porusza się wraz z niem w przestrzeni (zachowując niezmiennie swą wartość, o ile założymy, że ciało to nie pracuje podczas swego ruchu). Ten sposób wysłowienia sprawy stosuje się przedewszystkiem tylko do całkowitej energii U. W rozważanym atoli wypadku możemy też konsenkwentnie powiedzieć natychmiast, jak cała ta energia jest rozdzielona na poszczególne części całej objętości ciała. Istotnie, możemy podzielić całą bryłę na objętości $d\tau$ dowolnie małe, z których każda zawiera masę $dm = \rho\, d\tau$ (gdzie gęstość ρ może być różna dla różnych $d\tau$); każdy z tych elementów masy, izolowany od reszty i wzięty sam przez się, posiadałby energię $\frac{1}{2} v^2$. $dm = \frac{1}{2} v^2 \rho.\, d\tau$; energia zaś U całej bryły rozważanej jako układ złożony ze wszystkich tych elementów równa się w tym wypadku sumie energij tychże elementów i odwrotnie też daje się w sposób zupełnie określony rozłożyć na swe części. Możemy to wyrazić krótko, pisząc $U = \int \frac{1}{2} \rho\, v^2.\, d\tau$.

W tym więc prostym wypadku możemy powiedzieć, że energia U jest rozmieszczona w całej objętości ciała, a mianowicie tak, że *gęstość* jej, czyli ilość na jednostkę objętości, w dowolnym punkcie ciała wynosi $\frac{1}{2} \rho\, v^2$.

Podobnie też, gdy ciało sztywne posiada, oprócz postępowego, dowolny ruch obrotowy (tak iż v jest funkcyą położenia punktu w ciele), możemy w określony sposób mówić o lokalizacyi energii kinetycznej, przypisując każdemu elementowi $d\tau$ ilość energii $\frac{1}{2} \rho v^2 d\tau$. W tym zresztą wypadku ogólniejszym obliczamy nawet dopiero całą energię kinetyczną przez sumowanie czyli całkowanie wyrazu $\frac{1}{2} \rho v^2.\, d\tau$ dla całej objętości bryły.

W tenże sposób przedstawia się sprawa lokalizacyi energii kinetycznej dla ciała *odkształcalnego* (płynnego lub stałego), w którem prędkość v zależy od położenia w sposób znacznie swobodniej-

szy i bardziej urozmaicony, niż dla ciała sztywnego. Dla każdego z tych wypadków rozmieszczenie energii (kinetycznej) jest zupełnie określone, skoro tylko znamy rozmieszczenie materyi (masy) i prędkości.

Zauważmy, że jasność i określoność pojęcia lokalizacyi energii we wszystkich tych wypadkach polega na tem, że energia całego układu równa się sumie energii jego części wziętych z osobna,— a jest to okoliczność, która niezawsze zachodzi. Istnieją mianowicie wypadki, w których poszczególne części nie dają się w ten sposób wyodrębnić.

§ 35. Zanim pójdziemy dalej, rozważmy tu jeszcze pewne przekształcenia pierwotnego wyrazu energii kinetycznej płynu; nie będzie to bowiem bez korzyści dla naszych roztrząsań elektromagnetycznych.

Wyobraźmy sobie zamkniętą błoną giętką, wypełnioną płynem nieściśliwym. Oznaczając gęstość jego (stałą) przez ρ, zaś prędkość ruchu w dowolnym punkcie przez $\mathbf{v}$. mamy dla energii kinetycznej całej masy płynu:

$$U = \frac{1}{2}\rho \int v^2 \, d\tau. \tag{a}$$

Przypuśćmy, że dziedzina τ wypełniona płynem jest acykliczną i że płyn nasz nie zawiera żadnych wirów. Wówczas będzie

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi,$$

gdzie φ jest jednowartościową funkcyą skalarną położenia i stanowi t. zw. *potencyał prędkości.*

Otrzymamy więc $U = \frac{1}{2}\rho \int [\nabla \varphi]^2 \, d\tau$, czyli według twierdzenia Greena, przy niezbędnych założeniach ciągłości [porównaj *Wstęp*]:

$$U = \frac{1}{2}\rho \left[\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma + \int \varphi \nabla^2 \varphi \, d\tau \right],$$

gdzie $d\sigma$ jest elementem błony, ν zaś normalną zewnętrzną; ponieważ zaś płyn ma być nieściśliwy, przeto będzie

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla^2 \varphi = 0,$$

a więc

$$U = \frac{1}{2}\rho \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma,$$

czyli

$$U = \frac{1}{2}\rho \int \varphi \, \mathbf{v}_\nu \, d\sigma, \tag{b}$$

gdzie ν oznacza tym razem *wektor* jednostkowy w kierunku normalnej zewnętrznej.

O ile więc chodzi o stronę matematyczną sprawy, moglibyśmy otrzymać całą energię U, mówiąc, iż jest ona rozmieszczona czyli rozpostarta na samej tylko błonie, a mianowicie tak, iż każdy jej element $d\sigma$ zawiera ilość $\frac{1}{2}\ \rho\varphi.\mathbf{v}\nu.d\sigma$, t. j. twierdząc, że *gęstość powierzchniowa* energii jest wyrażona przez

$$(c) \qquad u = \frac{1}{2}\ \rho\ \varphi.\ \mathbf{v}\ \nu.$$

Gdyby dla zmysłów naszych była dostępna sama tylko błona zewnętrzna. t. j. gdybyśmy zupełnie nie wiedzieli o istnieniu zamkniętego w niej płynu, umiejscowilibyśmy energię U istotnie *na powierzchni* tej błony, czy to według wzoru (c), czy też według innego. Byłoby to zresztą lokalizacyą energii w matematycznem, nie zaś fizycznem, znaczeniu słowa, albowiem nie moglibyśmy wyodrębnić oddzielnych elementów tej błony i zaprządz każdy z nich z osobna do wykonywania pracy.

Skoro jednak udałoby się nam tylko przeniknąć do wnętrza błony i skonstatować tamże obecność i ruch płynu, zmienilibyśmy pogląd nasz natychmiast, twierdząc, że energia pozornie tylko przysługuje samej błonie, istotnie zaś znajduje się wewnątrz i jest rozmieszczona w całej przestrzeni ograniczonej przez błonę, tak mianowicie, że na każdy element $d\tau$ przypada ilość $\frac{1}{2}\ \rho\ v^2.\ d\tau$.

Gdybyśmy zresztą nie posiadali bezpośredniej wiedzy o istnieniu płynu, lecz znali tylko błonę zewnętrzną oraz jej sposób poruszania się, i gdyby energia układu była nam dana pierwotnie w postaci całki powierzchniowej

$$U = \int \psi\ \mathbf{v}\ \nu.\ d\sigma$$

o przepisanej, dla każdego punktu błony, funkcyi ψ, moglibyśmy — w celu „wytłumaczenia“ odnośnych zjawisk—*wyobrazić sobie* w niedostępnem dla nas wnętrzu błony jakiś płyn hypotetyczny i przedstawić daną energię U jako siłę żywą tego płynu. Wprowadzając następnie założenia dodatkowe jednorodności i nieściśliwości owego płynu tudzież irotacyjności jego ruchów, dalej kładąc gęstość jego ρ równą danej stałej dowolnej, moglibyśmy z wartości powierzchniowych

$\psi = \frac{1}{2}\ \rho\ \varphi$ a więc też $\varphi = \frac{2}{\rho}\ \psi$ i $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \mathbf{v}\ \nu$ wyznaczyć zupełnie wartość potencyału prędkości

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{r}\right]\right).\ d\sigma\ \text{[porówn. Wstęp, wzór (134)]},$$

a więc też samą prędkość $\mathbf{v}$ dla każdego punktu wewnętrznego,

czyli ruch całego płynu hypotetycznego, a więc też zlokalizować energię U wewnętrznie, przypisując każdemu elementowi objętości ilość $\frac{1}{2}\ \rho\ v^2.\ d\tau$.

Rozważmy inny jeszcze przykład hydrokinematyczny, który może być niemniej pożytecznym.

Wyobraźmy sobie powierzchnię lub skorupę zamkniętą, tym razem *sztywną* i nieruchomą, wypełnioną płynem nieściśliwym. Ruch tego płynu nie może już teraz być irotacyjnym, albowiem składowa normalna prędkości, t. j. $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$, znika w każdym punkcie powierzchni zewnętrznej, tak iż w założeniu, że dziedzina τ jest acykliczną, mielibyśmy

$$\int (\nabla \varphi)^2 d\tau = \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, d\sigma = 0,$$

t. j. $\mathbf{v} = \nabla \varphi = 0$ dla każdego punktu wewnętrznego; cały więc płyn znajdowałby się w stanie spoczynku.

Założymy atoli, że w płynie tym mamy n włókien wirowych zamkniętych, czyli n pierścieni wirowych, o momentach podwójnych *) $I_1, I_2, \ldots I_n$.

Ponieważ płyn nasz jest nieściśliwy, t. j. div $\mathbf{v} = 0$, możemy pierwotny wyraz jego siły żywej

$$(a) \qquad U = \frac{1}{2} \rho \int v^2\, d\tau$$

przekształcić, według twierdzeń XII, XII-a (*Wstęp*) przedewszystkiem na

$$(b') \qquad U = \frac{1}{2} \sum_1^n I_k\ S_k, \text{ gdzie } S_k = \rho \int_{(\sigma_k)} \mathbf{v}\ \nu.\ d\sigma_k,$$

następnie zaś na

$$(c') \qquad U = \rho \left[\tfrac{1}{2}\ L_{11}\ I_1^2 + L_{12}\ I_1\ I_2 + \ldots + \ldots + \tfrac{1}{2}\ L_{nn}\ I_n^2 \right]$$

gdzie spółczynniki L są określone przez wzory (160), str. 88.

W (b') całka S_k wyraża całkowitą masę płynu M_k przeszywającą, na jednostkę czasu, pierścień wirowy k. Siła więc żywa

---

*) *Curl* $\mathbf{v}$ daje bowiem *podwójną* prędkość wirowania.

całego płynu jest tu wyrażona przez pewne cechy (mianowicie momenty) samych wirów i przez odpowiednie prądy M_k.

We wzorze (c') cała energia kinetyczna płynu jest wprost wyrażona przez momenty wirów i oprócz tego przez spółczynniki L zależne jedynie tylko od ich wielkości, kształtów i konfiguracyi, a więc w każdym razie przez cechy związane bezpośrednio z samemi tylko wirami, nie zaś z pozostałą masą płynu pozbawioną ruchu wirowego.

Gdyby więc dla zmysłów naszych były dostępne tylko owe wiry, gdybyśmy zgoła nie wiedzieli o otaczającym płynie i znali energię układu wirów litylko w postaci (c'), natenczas nie umiejscowilibyśmy jej bynajmniej w całej dziedzinie τ, lecz przypisalibyśmy ją samemu spółistnieniu wirów.

Na samych wzorach (b') lub (c') nie moglibyśmy zresztą oprzeć żadnej rozumnej lokalizacyi energii: w (b') bowiem jedna (jakakolwiek) powierzchnia σ_k położona przez pierścień wirowy k nie różniłaby się niczem od wszystkich innych również przez k ograniczonych; w (c') zaś występują iloczyny momentów różnych, przestrzennie odległych od siebie wirów, tak iż odpowiadające tym wyrazom ilości energii nie dałyby się rocyonalnie umiejscowić ani w jednym ani w drugim wirze. Możemy atoli otrzymać łatwo wzór pośredni między (b') a (c') nadający się lepiej do tego celu. Jeżeli mianowicie położymy

$$\mathbf{v} = \operatorname{curl} \mathbf{F},$$

otrzymamy, według twiardzenia Stokes'a:

$$S_k = \rho \int \nu . \operatorname{curl} \mathbf{F} . d\sigma_k = \rho \int_{(s_k)} \mathbf{F} d\mathbf{s}_k,$$

gdzie całka liniowa rozciąga się na całą długość włókna wirowego k, którego element, pojęty wektorowo, oznaczyłem przez $d\mathbf{s}_k$. Podstawiając w (b'), otrzymamy:

$$U = \tfrac{1}{2} \rho \sum I_k \int \mathbf{F} \, d\mathbf{s}_k. \qquad (d')$$

[Wzór ten nazwałem pośrednim między (b') i (c'), albowiem wystarcza wyrazić w nim wektor $\mathbf{F}$ jako potencyał wektorowy wirów, jak we Wstępie,—aby otrzymać wzór (c')].

Możemy więc zdać sprawę z całej energii U. przypisując każdemu elementowi $d\mathbf{s}$ włókna wirowego ilość

$$\tfrac{1}{2} \rho \, I. \, \mathbf{F} d\mathbf{s},$$

czyli na jednostkę długości takiego włókna

$$\tfrac{1}{2}\,\rho\,\mathrm{I}.\,\mathbf{F}\,\lambda,$$

gdzie λ jest wektorem jednostkowym stycznym do włókna i wskazującym w jego kierunku dodatnim. Ponieważ wreszcie I równa się natężeniu wektora *curl* **v**, powiedzmy $\tilde{\omega}$, pomnożonemu przez powierzchnię przekroju poprzecznego włókna, przeto możemy powiedzieć, że *na jednostkę objętości płynu wirującego* przypada ilość energii:

$$u = \tfrac{1}{2}\,\rho\,\tilde{\omega}.\,\mathbf{F}\,\lambda.$$

Tym sposobem zlokalizowalibyśmy więc całą energię U w samych tylko wirujących częściach płynu.

Gdyby jednak powyższe przypuszczenie było nawet najzupełniej zgodne z rzeczywistością, t. j. gdyby istotnie same tylko wiry były dla zmysłów naszych dostępne, moglibyśmy przecież wprowadzić hypotezę, że są one otoczone jakimś niewidzialnym i nieuchwytnym płynem, który wypełnia całkowicie wnętrze naszej skorupy, i — przekształcając (d′) na (b′), zaś (b′) na $U = \tfrac{1}{2}\rho\int v^2\,d\tau$ — powiedzieć, że *każdy* (poruszający się wogóle) *element tego płynu* jest siedzibą pewnej ilości energii, odbierając tym sposobem ów szczególny przywilej elementom „wirowym“, t. j. dostępnym dla naszych zmysłów.

§ 36. Widzieliśmy, jak lokalizuje się energię kinetyczną, przypisując każdemu elementowi masy (dm) ilość energii ($\frac{1}{2}\,v^2 dm$) równą pracy, którą element ten, wyodrębniony z całego układu, wykonywa przy przejściu ze swego stanu chwilowego do stanu „neutralnego“. Według tejże zasady można też umiejscowić energię (dowolnego zresztą rodzaju) we wszystkich *tych* wypadkach, w których elementy poszczególne dają się w ten sposób wyodrębnić.

Podobnie jak przypisujemy bryle materyalnej energię kinetyczną, mówimy też np., że dane ciało *zawiera* pewną ilość Q ciepła czyli energii termicznej, t. j. lokalizujemy ją w tem ciele. Rozważając samą tylko temperaturę Θ i jej zmiany, a więc abstrahując od wszelkich innych zmian, jak np. objętości, ciśnienia i t. d., określamy stan neutralny danego ciała przez pewną temperaturę Θ_0, jak np. przez tak zwane „zero bezwzględne“, i jeżeli ciało to wydziela Q jednostsk ciepła (t. j. ogrzewa np. Q kilogramów wody od 0° do 1° Cels.), podczas gdy wszystkie jego elementy przechodzą od swych temperatur chwilowych, $\Theta = \mathrm{f}\,(x,y,z)$ do temperatury Θ_0, powiadamy przedewszystkiem, że *całe* to ciało zawiera w stanie określonym przez $\Theta = \mathrm{f}\,(x, y, z)$ ilość ciepła Q. Lecz tę całkowitą ilość energii cieplnej możemy następnie zlokalizować do-

kładniej t. j. wyznaczyć jej rozmieszczenie w całej objętości rozważanej bryły. Istotnie, przypuśćmy, że w stanie danym przez $\Theta = f(x,y,z)$ podzielono ją na dowolnie małe elementy objętościowe $d\tau$; wówczas każdy z tych elementów, wzięty z osobna, wydzieli przy przejściu z temperatury swej Θ do Θ_0 pewną, zupełnie określoną ilość ciepła dQ. Oznaczając przez ρ gęstość masy elementu $d\tau$ i przypuszczając, że jego pojemność cieplna czyli t. zw. ciepło właściwe c (na jednostkę masy) jest stałe, t. j. niezależne od Θ, mamy

$$dQ = c\rho\ (\Theta - \Theta_0)\ d\tau,$$

i tę właśnie ilość ciepła lokalizujemy w elemencie $d\tau$; to samo stosuje się do wszystkich innych elementów ciała, tak iż możemy wyrazić całkowitą jego energię cieplną Q czyli $U = Q$ przez

$$U = \int_{\Theta\Theta_0} c\rho\ (\Theta - \Theta_0)\ d\tau$$

i zlokalizować ją dokładnie, mówiąc, że gęstość jej w dowolnym punkcie ciała równa się $c\rho\,(\Theta - \Theta_0)$. Jeżeli zresztą c zależy od temperatury, mamy $dQ = \rho\ d\tau \int_{\Theta_0}^{\Theta} c\,d\Theta$, a więc dla gęstości energii:

całkę wyrazu $\rho c\,d\Theta$ wziętą od Θ_0 do Θ.

Wszystko to jest oczywiście zupełnie niezależne od wszelkich pytań dotyczących, „istoty ciepła“: czy jest ono siłą żywą „nieuporządkowanego“ ruchu cząsteczek ciała, czy też czemś innem.

Inny jeszcze przykład, dający się traktować w sposób zasadniczo podobny, mamy w „energii sprężystej“, t. j. w energii odkształcenia ciał sprężystych.

§ 37. We wszystkich tych wypadkach pojęcie lokalizacyi energii jest również jasne i proste jak w najprostszym wypadku poruszającego się ciała sztywnego, a zawdzięczamy to oczywiście *tej* okoliczności, że możemy—zarówno w tym jak w tamtych wypadkach—wyobrazić sobie dowolny element układu jako wyodrębniony lub izolowany od całej reszty i zaprzężony do pracy, wprost lub pośrednio, i że możemy wyznaczyć tym sposobem własną jego energię niezależnie od energii wszystkich innych części układu.

Istnieją atoli wypadki w których okoliczność ta nie zachodzi i które bezpośrednio przynajmniej, dla zmysłów naszych—różnią się zasadniczo od wszystkich innych, jakie dotychczas rozważyliśmy.

Mam tu na myśli te wypadki, w których energia czyli zdolność wykonywania pracy polega na *spółistnieniu* dwóch lub więcej

ciał odległych od siebie czyli izolowanych przestrzennie. Ten rodzaj energii możnaby nazwać ogólnie *energią położenia wzajemnego.*

Wybitnego przykładu dostarcza nam po temu dowolny układ ciał ciężkich, t. j. ciał podlegających wzajemnemu przyciąganiu według Newtonowskiego prawa tak zwanego *ciążenia powszechnego.*

Jeżeli m_1, m_2 są masy dwóch punktów materyalnych, czyli dwóch ciał, których rozmiary dają się zaniechać w porównaniu z ich wzajemną odległością r_{12}, natenczas przyciągają się one w kierunku łączącej je prostej ze siłą:

$$f = -k' \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2},$$

gdzie k' jest stałą dodatnią*), zależną od wyboru jednostek. Jeżeli punkty te zbliżają się ku sobie, przechodząc z odległości początkowej r'_{12} do odległości końcowej r''_{12}, układ m_1, m_2 wykonywa pewną pracę mechaniczną P niezależną od sposobu czyli od drogi przejścia, a mianowicie

$$P = -k' m_1 m_2 \int \frac{1}{r_{12}^2} dr_{12} = k' m_1 m_2 \left(\frac{1}{r''_{12}} - \frac{1}{r'_{12}} \right).$$

Powiemy więc, że układ tych dwóch mas posiada, w dowolnej konfiguracyi, energię grawitacyjną

$$U = a^2 - k' \frac{m_1 m_2}{r_{12}},$$

rozumiejąc przez a^2 stałą dodatnią i większą od $k' m_1 m_2 / r_{12}$ dla najmniejszych nawet odległości r_{12}, które dają się urzeczywistnić; jest to równoważne orzeczeniu, że „stan neutralny“ układu m_1, m_2 jest określony przez odległość $r_{12} = k' m_1 m_2 / a^2$; wówczas bowiem ma być $U = 0$; abstrahuję tu zresztą od ograniczonej stosowalności prawa Newtona, które—dla odległości molekularnych staje się niewątpliwie zawilszem.

Gdy odległość r_{12} staje się bardzo wielką, energia układu, rosnąc ustawicznie, dąży do wartości a^2; stąd widzimy, jakie jest właściwe stałej tej znaczenie. Wartość wyrazu zmiennego $k' m_1 m_2 / r_{12}$ natomiast stanowi to, co możnaby (za przykładem Heaviside'a) nazwać „wyczerpaniem“ energii grawitacyjnej układu.

---

*) Skoro jako *dodatnią* uważamy siłę dążącą do zwiększenia odległości r_{12}.

Jeżeli zamiast dwóch mamy dowolną liczbę punktów materyalnych, energia grawitacyjna całego układu będzie

$$U = C^2 - \frac{k'}{2} \sum\sum \frac{m_i\, m_j}{r_{ij}}, \qquad *)$$

gdzie znaczenie stałej dodatniej C^2 jest podobne do znaczenia a^2; jeżeli zaś materya grawitacyjna jest rozmieszczona w sposób ciągły, w jednej lub kilku częściach przestrzeni, tworząc jedno lub więcej ciał skończonych (które zresztą mogą być odkształcalne i ściśliwe), energia grawitacyjna układu będzie

$$(a) \qquad U = C^2 - \frac{k'}{2} \int\int \frac{1}{r}\, \rho\rho' d\tau\, d\tau',$$

gdzie r jest odległością elementów objętościowych $d\tau$, $d\tau'$, w których gęstość masy posiada wartości ρ, ρ', całki zaś obejmują wszystkie pary takich elementów.

Lecz „gdzie znajduje się“ cała ta energia grawitacyjna? Mając na myśli wszystkie dotychczas rozważone przykłady, nie możemy zgoła na pytanie to odpowiedzieć. W tym bowiem wypadku układ nie daje się poprostu rozłożyć na elementy, i nie możemy mówić o energii każdego z osobna elementu, jak poprzednio. Każdy dodajnik sumy lub całki zawiera w naszym wypadku iloczyn *dwóch* czynników, z których jeden jest związany z *jedną*, drugi z *inną*, mniej lub więcej odległą cząstką materyi ważkiej. Energii odpowiadającej takiej parze cząstek nia możemy w żaden rozumny sposób umiejscowić całkowicie ani w jednej, ani w drugiej cząstce, ani też po części w jednej, po części w drugiej,—albowiem posiadają one pewną zdolność wykonywania pracy czyli pewną ilość energii wówczas i tylko wówczas, gdy *spółistnieją* (w pewnej konfiguracyi) jako jeden układ, w którym jedna nie odgrywa ważniejszej roli niż druga. Gdybyśmy zaś chcieli umiejscowić energię nazewnątrz tych cząstek, w przestrzeni całej, brakłoby nam wszelkiej podpory, wszelkiego kryteryum, na którem możnaby oprzeć sposób rozdziału energii na poszczególne elementy objętościowe. Dopóki więc wyraz energii zawiera tego rodzaju iloczyny, pojęcie lokalizacyi energii nie daje się zgoła zastosować do układu mas grawitujących. Nie mówię już o odpowiedzi; ale samo nawet pytanie: „gdzie znajduje się energia takiego układu?“ jest, w tych warunkach, pozbawione wszelkiego sensu.

---

*) Dodaliśmy tu czynnik $\frac{1}{2}$, albowiem rozciągamy obie sumy na wszystkie masy, tak iż każda para występuje *dwa* razy: raz jako $m_i m_j$, drugi raz jako $m_j\, m_i$.

Możemy wprawdzie przekształcić i w tym również wypadku pierwotny wyraz energii, możemy całkę sześciokrotną (ze względu na spółrzędne x, y, z, x', y', z') we wzorze (a) przeistoczyć na całkę potrójną o kształcie $\int_\tau [\ldots]\, d\tau$, lecz będzie to tylko czysto *formalnym* podziałem układu, nie zaś fizycznem wyodrębnieniem jego elementów ze względu na ich zdolność wykonywania pracy.

Pomimo to jednak możemy zapoznać się tu z tem przekształceniem.

We wzorze (a) możemy, przedewszystkiem, rozciągnąć całkowanie dwukrotnie na *całą przestrzeń*, albowiem w elementach próżnych jest $\rho = 0$ (lub $\rho' = 0$), tak iż odpowiednie wyrazy znikają już same przez się. Niechaj wektor $\mathbf{F}$ wyobraża pole grawitacyjne, t. j. kierunek i natężenie siły wywieranej na jednostkę masy, w dowolnym punkcie przestrzeni, przez wszystkie ciała należące do układu. Pole grawitacyjne jest niewirowe, tak iż siła $\mathbf{F}$ posiada wszędzie jednowartościowy potencyał. Kładąc mianowicie

$$\psi = k' \int \frac{\rho' d\tau'}{r},$$

otrzymamy:

$$\mathbf{F} = \nabla \psi.$$

W określeniu tej funkcyi ψ całka obejmuje wszystkie elementy przestrzeni $d\tau'$, r zaś oznacza odległość elementu $d\tau'$ od rozważanego punktu. Otóż, wprowadzając funkcyę tę do (a), otrzymamy:

$$U = C^2 - \tfrac{1}{2} \int \psi \rho d\tau;$$

ponieważ zaś

$$\rho = -\frac{1}{4\pi k'} \operatorname{div} \mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi k'} \nabla^2 \psi,$$

przeto będzie:

$$(b) \qquad U = C^2 + \tfrac{1}{2}\, k \int \psi . \nabla^2 \psi . d\tau,$$

gdzie dla skrócenia położyliśmy $\frac{1}{4\pi k'} = k$; k jest więc (nieinaczej jak k') stałą dodatnią.

Jeżeli suma wszystkich mas jest skończona i jeżeli masy te są zebrane w pewnej skończonej dziedzinie przestrzeni, funkcya ψ

maleje w odległościach bardzo wielkich od tej dziedziny jak $\frac{1}{r}$, a więc F jak $\frac{1}{r^2}$. Stosując więc twierdzenie Greena do całej przestrzeni (porówn. *Wstęp*), otrzymamy:

$$\int \psi . \nabla^2 \psi . \, d\tau = - \int (\nabla \psi)^2 d\tau = - \int F^2 d\tau,$$

a więc, zamiast (b):

$$U = C^2 - \tfrac{1}{2} k \int F^2 d\tau,$$

lub też wreszcie, wprowadzając dla każdego punktu przestrzeni pewną wielkość skalarną h, taką, aby było $\int h \, d\tau = C^2$: *)

$$U = \int (h - \tfrac{1}{2} k F^2) \, d\tau. \quad (c) \qquad (c)$$

Opierając się na tym wzorze moglibyśmy zlokalizować energię grawitacyjną, mówiąc, że na każdy element przestrzeni, w którym panuje siła F, przypada ilość $(h - \frac{1}{2} k F^2) \, d\tau$, czyli, że gęstość energii wynosi $(h - \frac{1}{2} k F^2)$; wyraz $\frac{1}{2} k F^2$ możnaby nazwać „wyczerpaniem“ energii, na jednostkę objętości. Lecz lokalizacya taka, czysto formalna, posiadałaby to tylko znaczenie, że wyraz $h - \frac{1}{2} k F^2$ scałkowany dla całej przestrzeni dałby nam prawdziwą wartość dla energii całkowitej, a mianowicie (c) lub (a). Istotnie, w tym wypadku nie możemy zaprządz do pracy poszczególnych elementów objętościowych. Moglibyśmy wprawdzie wyobrazić sobie przestrzeń wypełnioną całkowicie środowiskiem hypotetycznem, jakimś sprężystym „eterem“ nieważkim, i uważać działania na ciała ważkie jako wypadkowe pewnych napięć i ciśnień, zaś $(h - \frac{1}{2} h F^2) \, d\tau$ jako energię odkształcenia elementu owego eteru hypotetycznego. Dopóki jednak nie stwierdzimy doświadczalnie istnienia takich napięć i ciśnień (jak to miało miejsce w dziedzinie elektromagnetycznej), lokalizacya owa nie straci swego cha-

*) Chcąc otrzymać C^2 skończenie wielkie, nie możemy oczywiście założyć, że h posiada *tę samą* wartość (skończoną) dla wszystkich punktów przestrzeni, lecz, że jest ono raczej funkcyą położenia,—na co zresztą trudno się zgodzić wobec jednorodności przestrzeni.

rakteru czysto formalnego i nie stanie się lokalizacyą w fizycznem znaczeniu słowa.

Wrócimy jeszcze do tego przedmiotu aby porównać pole grawitacyjne z polem elektrycznem lub magnetycznem.

Nie należy zresztą sądzić, że zjawiska ciążenia powszechnego stanowią *jedyny* wypadek, do którego pojęcie lokalizacyi energii trudno jest zastosować. Tegoż rodzaju trudności, jeżeli nie większe, napotykamy w mnóstwie innych wypadków, w których chodzi mianowicie o zjawiska chemiczne.

Dwie różne substancye A, B, które mają do siebie t. zw. „powinowactwo chemiczne“, stanowią układ wykonywający pewną ilość pracy lub wydzielający pewną ilość ciepła, światła i t. d., podczas gdy składniki jego łączą się wzajemnie, aby utworzyć nową substancyę, ciało „złożone“ $C = A + B$ (lub według zwykłej pisowni AB). Obierając jako „neutralny“ ów stan układu, w którym A, B stanowią jedno ciało C o pewnej temperaturze, ciśnieniu i t. d., powiemy więc, że układ ciał A, B niepołączonych jeszcze ze sobą posiada pewną ilość *energii chemicznej*, a mianowicie równą sumie owych ilości ciepła, pracy i t. d., które z układu tego otrzymujemy, skoro przechodzi on do owego stanu. Otóż, ponieważ energia ta chemiczna jest jaknajściślej związana z *współistnieniem* dwóch (lub więcej) substancyj składowych A, B, nie możemy przypisać jej całkowicie ani jednej, ani drugiej, ani też po części jednej, po części zaś drugiej. Jeżeli składniki A, B, powiedzmy np., dwa litry wodoru i jeden litr tlenu (przy tem samem ciśnieniu i temperaturze), przed połączeniem się chemicznem i utworzeniem wody, stanowią mieszaninę dostrzegalnie jednorodną, natenczas możemy powiedzieć, że cała energia chemiczna jest rozmieszczona jednostajnie w różnych częściach $\triangle\tau$ objętości trzylitrowej zajętej przez mieszaninę, zakładając atoli, że wymiary molekularne dają się zaniechać w porównaniu z najmniejszemi nawet objętościami $\triangle\tau$, które dopuszczamy jeszcze w naszem rozważaniu. Tak np. możnaby powiedzieć, że każdy centymetr sześcienny mieszaniny zawiera $^1/_{3000\text{-ną}}$ część całej energii chemicznej układu. Byłoby to przynajmniej pewnego rodzaju grubą lokalizacyą tej energii. Jeżeli jednak owe dwa litry czystego wodoru znajdują się w jednym, zaś litr tlenu w drugim jakimś zbiorniku, umieszczonym w dowolnej odległości od pierwszego, nie możemy umiejscowić energii chemicznej tego układu nawet w sposób przybliżony; niema bowiem żadnej racyi szukać jej siedziby raczej w jednym lub drugim zbiorniku, niż w przestrzeni zewnętrznej.

Uciekając się do molekularnej teoryi materyi i redukując powinowactwo chemiczne do pewnych przyciągań między poszczególnemi cząsteczkami (lub atomami) różnych ciał, według prawa zawierającego w pewien zawiły sposób ich wzajemną odległość, napotkalibyśmy oczywiście trudności tegoż rodzaju co w wypadku cią-

żenia powszechnego. Lecz biorąc nawet zjawiska chemiczne tak, jak są nam dane bezpośrednio, t. j. niezależnie od wszelkich teoryj molekularnych, mamy, z zastosowaniem pojęcia lokalizacyi energii, do zwalczenia też same trudności, co w wypadku grawitacyi, z tą tylko różnicą, że zamiast *określonej* zależności sił, a więc też energii, od odległości wzajemnej różnych części układu mamy tu pewną tylko ogólną niekongruencyjność w przestrzeni, bez tej określoności geometrycznej, ilościowej.

W żadnym z tych wypadków nie możemy (aż dotąd przynajmniej) wyodrębnić dowolnej części układu, aby zaprządz ją do pracy niezależnie od reszty, i dla tego też nie umiemy zlokalizować energii, którą zawdzięczamy kooperacyi tych różnych części.

Daje się to natomiast urzeczywistnić poniekąd w wypadku zjawisk elektrycznych i magnetycznych, jak zobaczymy niebawem.

Energia elektromagnetyczna.

§ 38. Przechodząc do zastosowania ogólnych pojęć energii i jej lokalizacyi do zjawisk elektromagnetycznych, zacznijmy od wypadku najprostszego, a mianowicie od pola czysto elektrycznego, bez domieszki sił magnetycznych. Wiemy już, że pole takie może być tylko statycznem i niewirowem, tak iż cechujący je wektor elektryczny posiada wszędzie potencyał jednowartościowy (φ): $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

Wyobraźmy sobie więc dowolne pole elektryczne, rozciągające się w jednym lub kilku różnych dielektrykach doskonale *izolujących* i ograniczone, całkowicie lub częściowo, przez powierzchnie dowolnej liczby przewodników. Pole takie będzie zupełnie określone przez kierunek i natężenie siły elektrycznej (lub też przez potencyał φ) w każdym punkcie. Siły mechaniczne, czyli t. zw. ponderomotoryczne, czynne w tem polu będą starały się przesunąć w pewien sposób przewodniki, tudzież ewentualnie bryły dielektryczne, a więc wykonać pewną pracę mechaniczną. Regulując w odpowiedni sposób zewnętrzne siły mechaniczne, możemy dopiąć tego, aby prędkości wszelkich ruchów były bardzo małe, t. j. aby cały układ pracował bardzo powolnie. Wówczas, jednocześnie z temi ruchami i wykonywaniem pracy, samo pole elektryczne będzie również zmieniało się bardzo powolnie, tak iż rozmieszczenie siły elektrycznej będzie w każdej chwili nieznacznie tylko różne od rozmieszczenia w polu statycznem; siły magnetyczne, odpowiadające zmianom czasowym pola elektrycznego, są tego samego rzędu co *prędkość* tych zmian (podzielona przez prędkość „krytyczną“ c; $K\dot{\mathbf{E}} = c.\ curl\ \mathbf{M}$), tak iż przy założo-

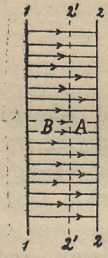
nych warunkach pole magnetyczne, towarzyszące zmianom konfiguracyi całego układu brył, daje się zupełnie zaniechać.

Praca mechaniczna, otrzymana tym sposobem z pola elektrycznego, będzie więc *jedynym* równoważnikiem zmian, jakim uległo ono przy przejściu ze swego stanu początkowego do końcowego.

Otóż, uważając jako *neutralny* ten stan układu, w którym siła E znika w każdym punkcie przestrzeni, nazwiemy *energią elektryczną* naszego układu całkowitą pracę mechaniczną, otrzymaną przy przejściu pola ze stanu pierwotnego do stanu, w którym siły elektryczne są zupełnie nieobecne, t. j. $E = 0$ w całej przestrzeni.

Energia elektryczna będzie więc w ogóle pewną funkcyą (skalarną) rozmieszczenia siły **E** w całej przestrzeni i będzie też zależała w pewien sposób od własności wypełniających ją środowisk, a mianowicie od wartości ich spółczynników dielektrycznych.

Aby określić zależność tę ilościowo, możemy zacząć od najprostszego przypadku, a mianowicie od pola jednostajnego zawartego między okładkami kondensatora „płaskiego“ [patrz Rozdz. IV]; pole to składa się z pęczka rurek prostych, zaczynających się na wewnętrznej stronie jednej okładki (11) i kończących się na wewnętrznej stronie drugiej okładki (22, Fig. 34); wszystkie linie siły są normalne do okładek i natężenie siły E jest jednakowe we wszystkich punktach dielektryka, zawartego między okładkami; w jakich warunkach i z jakiem przybliżeniem zachodzi ta jednostajność pola, czytelnik będzie mógł osądzić na podstawie Rozdziału IV.



(Fig. 34).

Siła *ponderomotoryczna*, dążąca do zmniejszenia wzajemnej odległości l okładek, wynosi, na jednostkę powierzchni, $\frac{1}{2} KE^2$, jeżeli K jest spółczynnikiem dielektrycznym środowiska *12*, ktore według założenia ma być jednorodne i izotropowe; siła ta jest czysto normalna do powierzchni okładki. Wszystko to możemy tu uważać jako wyraz faktów doświadczalnych.

Oznaczając przez S powierzchnię każdej z okładek, otrzymamy dla siły ponderomotorycznej całkowitej wyraz

$$F = \frac{1}{2} KE^2.S.$$

Iloczyn $S.l = V$ jest objętością całej przestrzeni, w której siła E dostrzegalnie różni się od zera (w założeniu, że l jest małe w porównaniu z rozmiarami okładek, a więc np. z ich promieniami, jeżeli każda z nich ma postać krążka); innemi słowy, $V = S.l$ jest objętością całego pola elektrycznego, które mamy rozważyć.

Otóż jeżeli okładki 11, 22 zbliżają się do siebie stopniowo (z prędkością bardzo małą, w myśl powyższej uwagi) i są przytem ustawicznie izolowane i równoległe do siebie, zawarte między niemi pole elektryczne pozostaje jednostajnem i natężenie siły E,

a więc też siły ponderomotorycznej F zachowuje stale swą wartość. (W tych warunkach ładunki $e_1 = KE.S = -e_2$ będą stałe, podczas gdy różnica potencyałów $\varphi_1 - \varphi_2 = E.l$ będzie maleć stopniowo, proporcyonalnie do odległości l.) Praca więc siły F podczas przejścia okładek od odległości pierwotnej l aż do $l = o$, t. j. aż do wzajemnego ich zetknięcia się, będzie

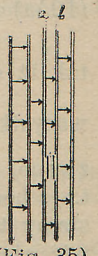
$$Fl = \tfrac{1}{2} KE^2.S.l = \tfrac{1}{2} KE^2. V.$$

Gdy jednak okładki zetkną się ze sobą, siła elektryczna E zniknie wszędzie; wyraz ten przedstawia więc energię elektryczną U_e kondensatora w jego stanie pierwotnym, t. j. energię pola, które zajmowało przestrzeń V; będziemy więc mieli

$$U_e = \tfrac{1}{2} KE^2. V.$$

Co się tyczy lokalizacyi tej energii, możemy przedewszystkiem powiedzieć, że siedzibą *całej* energii U_e jest część V przestrzeni, czyli wypełniający ją dielektryk. Następnie jednak będziemy mogli umiejscowić ją dokładnie, czyli szczegółowo, t. j. rozmieścić całą ilość U_e w poszczególnych elementach tej objętości. Istotnie, możemy zaprządz do pracy (że tak powiem) dowolną część rozważanego pola niezależnie od reszty tego pola, niszcząc całkowicie siłę elektryczną w *tej* części i pozostawiając ją nietkniętą we wszystkich innych częściach. Jeżeli jedna z okładek jest nieruchoma, podczas gdy druga przechodzi z położenia 22 do $2'2'$ (fig. 34), pole będzie unicestwione w części A całej objętości V i pozostanie nietknięte w części B; odpowiednia ilość pracy będzie $\frac{1}{2} KE^2. S(l—l') = \frac{1}{2} KE^2. A$; tę więc część energii całkowitej zlokalizujemy w części A, resztę zaś, t. j. $\frac{1}{2} KE^2. B$, w części B całej objętości V.

Możemy też wstawić między okładki kondensatora i równolegle do nich cały szereg podwójnych blach metalowych, dowolnie cienkich, nie zmieniając przez to pierwotnego pola elektrycznego; wycinając następnie z każdej pary blach, jak a, b (fig. 35) dwa elementy kongruencyjne i analogicznie położone, będziemy mieli dowolnie wiele kondensatorów „płaskich“ dowolnie małych; zaś każdy z nich możemy zaprządz do pracy, mianowicie każdy z osobna i niezależnie od wszystkich pozostałych, unicestwiając tym sposobem siłę elektryczną w odpowiednim elemencie środowiska dielektrycznego i pozostawiając ją nietkniętą gdzieindziej. Możemy więc zlokalizować dowolnie dokładnie energię całkowitą U_e pola zajmującego przestrzeń V, mówiąc, że każdy jej element $d\tau$, dowolnie mały, zawiera pewną określoną ilość energii, a mianowicie



(Fig. 35).

$$\tfrac{1}{2} KE^2. d\tau.$$

Lecz to, cośmy przed chwilą powiedzieli o polu *jednostajnem*, daje się natychmiast rozciągnąć do dowolnego pola elektrostatycznego, które zamiast płaskich posiada inaczej ukształtowane powierzchnie stałego potencyału. Istotnie, bez zakłócenia go możemy wprowadzić szereg blach metalowych kongruencyjnych z powierzchniami izopotencyalnemi, biorąc odległości między sąsiedniemi blachami bardzo małe w porównaniu z ich promieniami krzywizny; rozcinając następnie każdą z nich na elementy, będziemy mieli cały układ małych kondensatorów „płaskich“, z których każdy z osobna daje się zaprządz do pracy.

Rozumując jak wyżej, powiemy więc, że każdy element $d\tau$ pola elektrostatycznego zawiera $\frac{1}{2} KE^2 . d\tau$ jednostek energii, czyli, że *gęstość energii elektrycznej* w dowolnym punkcie jest

(104′) $$\frac{1}{2} KE^2$$

i że energia całkowita pola równa się sumie wszystkich tych ilości elementarnych czyli całce

(104) $$U_e = \frac{1}{2} \int KE^2 . d\tau$$

rozpostartej na całe pole elektryczne.

Przypominając sobie określenie „komórki“ (t. j. części rurki jednostkowej zawartej między przekrojami poprzecznemi o potencyałach φ, $\varphi + 1$), przekonamy się łatwo, że objętość jej wynosi $1/E^2$; możemy więc powiedzieć, że *każda komórka jednostkowa zawiera ilość* $\frac{1}{2} K$, w próżni zaś *pół jednostki energii elektrycznej*.

Widzimy też bezpośrednio, że to, cośmy powiedzieli o dielektryku jednorodnym, daje się bez żadnych zmian rozciągnąć do dielektryka *niejednorodnego*, w którym spółczynnik K zmienia się od punktu do punktu, czy to stopniowo, czy też w sposób nieciągły.

Dla dielektryka *jednorodnego* mamy według (104):

(104a) $$U_e = \frac{1}{2} K \int E^2 \, d\tau,$$

tak iż do energii elektrycznej daje się w tym wypadku zastosować wszystko to, cośmy we *Wstępie* powiedzieli o całce $\frac{1}{2} \int R^2 \, d\tau$, nazwanej tamże „energią“ pola wektorowego **R** czysto abstrakcyjnie, t. j. bez względu na jej znaczenie fizyczne. Z uwagi tej skorzystamy też istotnie w Rozdziale IV, w którym postaramy się zestawić główne zasady Elektrostatyki (obok zasad Magnetostatyki).

§ 39. Jeżeli chodzi o dielektryk *krystaliczny*, możemy, przez uogólnienie wzoru (104), napisać dla energii elektrycznej

$$U_e = \tfrac{1}{2}\int \mathbf{ED}\, d\tau, \qquad (105)$$

t. j. dla gęstości tej energii

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{ED}. \qquad (106)$$

Wzory te, jako ogólniejsze, nie wypływają bynajmniej z wzorów dla środowiska izotropowego; przyjęto je dla tego, że prowadzą do wyników zgodnych z doświadczeniem.

Oznaczając spółczynniki główne kryształu przez K_1, K_2, K_3, mamy $\frac{1}{2}\mathbf{ED} = \frac{1}{2}(K_1E_1^2 + K_2E_2^2 + K_3E_3^2)$; stąd jednak bynajmniej nie wynika, abyśmy mogli wzór (105) wyprowadzić ze (104) przez rozkład siły **E** na składowe E_1, E_2, E_3 wzdłuż osi głównych kryształu. Nie czyniąc bowiem żadnych dodatkowych założeń, nie można twierdzić, że wytworzenie składowych E_2, E_3 przy istniejącej już E_1 wymaga takiej samej ilości pracy (t. j. $\frac{1}{2}K_2E_2^2$, względnie $\frac{1}{2}K_3E_3^2$, na jednostkę objętości), jak przy zgoła nieistniejącem jeszcze polu.

Przypomnijmy sobie, że polaryzacya tworzy zawsze kąt *ostry* ze siłą elektryczną, tak iż iloczyn skalarny **ED**, a więc też gęstość energii elektrycznej jest zawsze *dodatnią*, znika zaś wówczas tylko, gdy $E = D = 0$.

§ 40. Analogicznie do energii elektrycznej otrzymuje się *energię magnetyczną* U_m, przypisując każdemu elementowi objętości $d\tau$, niezależnie od tego, jaką jest wypełniony substancyą, ilość:

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{MB}.\, d\tau \;^*) \qquad (107)$$

---

*) Pod warunkiem atoli, że polaryzacya **B** jest jednowartościową funkcyą siły **M**, co dotychczas zawsze zakładaliśmy; w ciałach natomiast, które objawiają t. zw. „hysterezę magnetyczną“, energia doprowadzona elementowi $d\tau$ podczas procesu jego magnetyzacyi będzie

$$d\tau \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{M}d\mathbf{B}$$

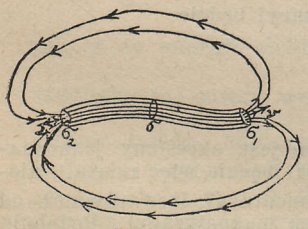
gdzie $d\mathbf{B}$ jest przyrostem wektora **B**, który *nie* jest określony jednoznacznie przez spółczesną siłę **M**; wartość tej całki będzie więc zależała nietylko od stanu początkowego i końcowego elementu $d\tau$, lecz również od wszystkich pośrednich, t. j. od samego procesu magnetyzacyi. Podobnie zawiłe zresztą stosunki zachodzą też czasami dla wektorów elektrycznych **D**, **E**.

i rozciągając całkę tego wyrazu skalarnego, dodatniego, na całą dziedzinę przestrzeni, do której przenikają linie siły i polaryzacyi magnetycznej:

$$U_m = \frac{1}{2} \int \mathfrak{MB} \, d\tau. \tag{108}$$

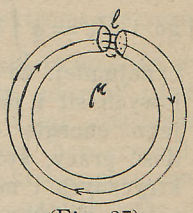
Sama tylko analogia z polem elektrycznem nie wystarczałaby oczywiście do usprawiedliwienia wzoru tego dla energii magnetycznej. Wszystkie jednak wnioski, wysnuwane stąd przy pomocy zasady zachowania energii i znanych własności specyalnych pola magnetycznego, są zgodne z faktami doświadczalnemi. Proste zresztą przekształcenia matematyczne dadzą nam możność sprowadzenia tego wyrazu energii do postaci właściwej teoryom „działania na odległość“, które, wychodząc z pojęcia „biegunów magnetycznych“, traktują ich przyciągania i odpychania i wyprowadzają stąd ich „energię potencyalną“ zupełnie tak samo, jak buduje się wyraz energii potencyalnej układu mas grawitujących. Mam tu na myśli przedewszystkiem pola statyczne, nietylko zresztą magnetyczne, lecz rownież elektryczne, o których będzie mowa w Rozdziale IV.

Lokalizacya energii magnetycznej według wzoru (107) ma charakter nietylko formalny, lecz zarówno fizyczny, w znaczeniu wyrazów powyżej objaśnionem. Można mianowicie unicestwić siłę i polaryzacyę magnetyczną w danej dziedzinie przestrzeni, nie naruszając ich gdzieindziej, i otrzymać tym sposobem pracę mechaniczną równoważną energii przypisywanej tej właśnie dziedzinie. Proces taki daje się istotnie urzeczywistnić, w pewnych przynajmniej wypadkach, aczkolwiek w sposób mniej bezpośredni niż proces z kondensatorami, który zastosowaliśmy do zmierzenia i umiejscowienia energii elektrycznej. Analogia magnetyczna przewodnika elektrycznego nie istnieje wprawdzie, o ile wiadomo ze wszystkich dotychczasowych doświadczeń; dla dopięcia naszego celu możemy atoli uciec się do magnesu *trwałego*, a mianowicie do *solenoidu* magnetycznego. Tak nazywa się ciało podłużne, jak np. drut stalowy, namagnesowany *podłużnie*, t. j. drut, w którym wszystkie linie siły magnetycznej przebiegają wewnątrz, nie przeszywając pobocznicy i przechodzą do środowiska zewnętrznego przez jednę powierzchnię końcową σ_1, czyli t. zw. *biegun północny*, aby wrócić przez drugą σ_2, zwaną biegunem *południowym* (Fig. 36). Indukcya magnetyczna przez każdy przekrój poprzeczny (σ) solenoidu posiada tę samą wartość liczebną, co przez σ_1 i σ_2; biorąc jednak na σ_1 i na σ_2 normalne ν skierowane na zewnątrz, będziemy mieli



(Fig. 36).

dla indukcyi przez σ_1 znak +, zaś dla σ_2 znak —. Wielkość tych indukcyj nazywa się zwykle *natężeniem biegunów* solenoidu. Otóż, jeżeli powierzchnie końcowe takiego solenoidu σ_1, σ_2, które możemy wyobrazić sobie jako małe płaszczyzny tego samego kształtu i rozmiarów, są umieszczone równolegle do siebie, jedna wprost naprzeciw drugiej, w odległości l bardzo małej w porównaniu z ich rozmiarami, natenczas pole magnetyczne zewnętrzne ogranicza się dostrzegalnie do samej tylko przestrzeni walcowatej między σ_1 i σ_2, mającej objętość $\Delta\tau = \sigma l$ (piszemy $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$). Pole to jest w przybliżeniu jednostajne; linie siły przebiegają w niem od σ_1 do σ_2, normalnie do tych płaszczyzn, zupełnie jak między okładkami płaskiego kondensatora elektrycznego. W tych warunkach, jak możemy twierdzić na podstawie doświadczenia, σ_1 i σ_2 przyciągają się wzajemnie z siłą ponderomotoryczną $F = \frac{1}{2}\mu M^2\sigma = \frac{1}{2}$ **MB**σ, gdzie M jest natężeniem pola między σ_1 i σ_2, μ zaś przenikliwością środowiska. Jeżeli magnes nasz jest giętki, bieguny jego będą dążyły ku sobie aż do zetknięcia się; solenoid zamknie się, tworząc pierścień zupełny. Skoro magnes jest *trwały*, pole wewnętrzne nie ulegnie podczas tego procesu żadnej zmianie; toż samo więc dotyczy natężenia pola M i siły F, tak iż całkowita praca mechaniczna wykonana przez F będzie $Fl = \frac{1}{2}$ **MB** $\sigma l = \frac{1}{2}$ **MB**. $\Delta\tau$, jak we wzorze (107), w wypadku izotropii. Skoro solenoid się zamknie, możemy go usunąć (co nie kosztuje żadnej pracy), a wówczas dziedzina $\Delta\tau$ przejdzie do swego stanu neutralnego, t. j. siła magnetyczna nie będzie już w niej istniała; ponieważ zaś stan magnetyczny żadnego elementu samego magnesu nie doznał podczas tego procesu żadnej zmiany, praca otrzymana jest równoważnikiem samego tylko unicestwienia pola, które poprzednio w $\Delta\tau$ istniało i wyraża przeto własną jego energię magnetyczną,—co było do okazania.



(Fig. 37).

Dla ciał izotropowych możemy zamiast (107) napisać

$$\frac{1}{2}\mu.M^2.d\tau = \frac{1}{2\mu}B^2.d\tau, \qquad (107a)$$

skąd widzimy, że każda *komórka* magnetyczna (jednostkowa) zawiera energię $\frac{1}{2}\mu$, analogicznie do komórek elektrycznych.

§ 41. Dotychczas mówiliśmy o energii elektrycznej lub magnetycznej pola statycznego, a więc pozbawionego wirów. Jeżeli chodzi o pola *zmienne w czasie*, t. j. w każdym razie wirowe, nie może oczywiście być mowy o potencyale skalarnym siły **E** lub **M**, a więc też o oparciu lokalizacyi energii jednego lub drugiego rodzaju na pracy elementarnych kondensatorów lub analogicznych poniekąd solenoidów. W tym też ogólnym wypadku energie elektry-

czna i magnetyczna nie występują oddzielnie, lecz towarzyszą sobie nierozerwalnie. Znajomość wyrazu energii dla stanów równowagi nie upoważnia nas zresztą do wygłaszania jakichkolwiek twierdzeń ogólnych o energii odpowiadającej stanom zmiennym. Stąd więc, że $U_e = \frac{1}{2}\int \mathbf{ED}\, d\tau$ jest energią pola elektrostatycznego i $U_m = \frac{1}{2}\int \mathbf{MB}\, d\tau$ energią pola magnetostatycznego, *nie wynika* bynajmniej, że suma $U_e + U_m$ tych wyrazów, utworzonych z chwilowych sił i polaryzacyj dowolnego pola zmiennego, wyrażać musi jego energię całkowitą, czyli t. zw. *elektromagnetyczną*, t. j. tę ilość pracy, którą otrzymalibyśmy przez unicestwienie wektorów elektrycznych i magnetycznych panujących w danej chwili t w całem polu. Możemy to jednak *założyć* (idąc za powszechnym przykładem) i powiedzieć, że—o ile wiadomo dotychczas—wyniki, płynące z tego założenia, nie są sprzeczne z doświadczeniem.

Dla tego też napiszemy dla *energii elektromagnetycznej* U dowolnego pola zmiennego, nietylko zresztą w izolatorach doskonałych, lecz i w środowiskach przewodzących:

$$\text{(IV)} \qquad U = U_e + U_m = \frac{1}{2}\int (\mathbf{ED} + \mathbf{MB})\, d\tau.$$

Co do lokalizacyi tej energii, jeżeli nie pod względem fizycznym, to przynajmniej czysto formalnym, możemy powiedzieć, że na jednostkę objętości przypada w dowolnem miejscu pola ilość energii

$$\text{(109)} \qquad u = \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{MB}),$$

czyli, że *gęstość* energii elektromagnetycznej równa się połowie sumy iloczynów skalarnych odpowiednich sił i polaryzacyj.

Dla środowiska izotropowego, zarówno pod względem elektrycznym jak i magnetycznym, mamy zamiast (109)

$$\text{(109a)} \qquad u = \frac{1}{2}(K.E^2 + \mu.M^2).$$

§ 42. Dzięki otrzymanym dopiero co wzorom dla energii elektromagnetycznej i jej gęstości możemy obecnie interpretować fizycznie pewne wzory, które w Rozdz. II wyprowadziliśmy bezpośrednio z równań różniczkowych pola.

Dla *izolatorów doskonałych* nieruchomych mieliśmy tam, w § 14, wzory (38′) i (40), które obecnie możemy napisać krótko:

$$\text{(110′)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{F},$$

$$-\frac{dU}{dt} = \int \mathbf{F}_\nu \, d\sigma, \tag{110}$$

gdzie $\mathbf{F} = c\,V\mathbf{EM}$, $U = \int u \, d\tau$, zaś σ jest powierzchnią ograniczającą dziedzinę przestrzeni τ.

Ponieważ $-\frac{dU}{dt}$ jest ubytkiem energii elektromagnetycznej dziedziny τ, na jednostkę czasu, i ponieważ energia ta stanowi według założenia *całą* energię zawartą w τ, przeto możemy powiedzieć, że wymiana energii między tą dziedziną a jej otoczeniem odbywa się tak, jak gdyby przez każdy element powierzchni σ *przepływała*, na jednostkę czasu, ilość energii elektromagnetycznej $\mathbf{F}_\nu \, d\sigma$ w kierunku normalnej zewnętrznej ν, czyli, na jednostkę powierzchni ilość energii F w kierunku wektora $\mathbf{F}$.

Z tych oto względów, idąc za przykładem *J. H. Poyntinga* *), nazwano wektor

$$\mathbf{F} = c\,V\mathbf{EM} \tag{39}$$

prądem energii elektromagnetycznej, co do kierunku i natężenia, w chwili t, w dowolnym punkcie pola, w którym panują siły $\mathbf{E}$, $\mathbf{M}$. Ponieważ autor ten pierwszy zwrócił uwagę na te stosunki, wektor ten (z pominięciem pewnego czynnika stałego zależnego od wyboru jednostek) nazywa się też często *wektorem Poyntinga*. Według (39) wektor ten jest prostopadły do płaszczyzny $\mathbf{E}$, $\mathbf{M}$, natężenie zaś jego jest proporcyonalne do iloczynu natężeń tych sił i do wstawy zawartego między niemi kąta.

Wzór (110′) wyraża zresztą to samo co (110) w zastosowaniu do elementu objętości. Wzór ten, t. j. równanie różniczkowe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$

możemy, dla dowolnego zresztą rodzaju energii, o gęstości u, uważać jako określenie „*prądu*“ $\mathbf{F}$ tejże energii. Powinniśmy też zawsze o tem pamiętać, że pojęcie prądu energii w ogóle jest dla nas na tej tylko właśnie drodze określone; nie wiemy bowiem zgoła, w jakiem znaczeniu słowa możnaby mówić o indywidualizacyi „cząstek energii“.

Określenie to (110′), nieinaczej jak (110), pozostawia oczywiście pewną dowolność; do każdego bowiem wektora $\mathbf{F}$, który dla

---

*) On the transfer of energy in the electromagnetic field. London, Phil. Trans. 175 (1884).

danego $\frac{\partial u}{\partial t}$ czyni zadość równaniu $\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, możemy do dać dowolny wektor $\mathbf{G}$, byle tylko czysto *solenoidalny*, tak iż suma $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ również będzie wyobrażała prąd energii.

Dla prądu energii elektromagnetycznej mamy więc, ogólniej niż według Poyntinga:

$$\mathbf{F} = c\, V\mathbf{EM} + \mathbf{G},$$

gdzie $\mathbf{G}$ jest wektorem solenoidalnym, lecz zresztą zupełnie dowolnym. Wektor Poyntinga jest więc tylko pewnem szczególnem rozwiązaniem równania (110′). Inne rozwiązania szczególne byłyby np.

$$\mathbf{F} = c\, V\mathbf{EM} + \gamma\mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = c\, V\mathbf{EM} + \gamma.\mathbf{p},$$

gdzie γ jest dowolną stałą skalarną, zaś $\mathbf{p}$ prądem elektrycznym; istotnie bowiem zarówno polaryzacya magnetyczna $\mathbf{B}$ jak też i prąd $\mathbf{p}$ (nieinaczej jak prąd magnetyczny $\mathbf{q}$, porówn. Rozdz. I i II) posiadają rozmieszczenie czysto solenoidalne. Możnaby też łatwo znaleść inne jeszcze rozwiązania.

Prąd Poyntinga posiada jednak, w pewnych przynajmniej wypadkach, zaletę prostoty i jest, w nowszych czasach, w powszechnem niemal u fizyków teoretycznych użyciu. Z przykładami ilustrującemi to pojęcie pomocnicze spotkamy się tu i owdzie w dalszych Rozdziałach tej książki.

Jeżeli wektor Poyntinga jest *styczny* do powierzchni ograniczającej dziedzinę τ, natenczas (§ 14, 1°) *energia elektromagnetyczna* tejże dziedziny będzie *niezmienna* w czasie; o ile zaś chodzi o całą przestrzeń (§ 14, 2°), energia U będzie *niezmiennikiem* pola, jeżeli np. natężenia sił elektrycznej i magnetycznej stają się, w bardzo wielkich odległościach, proporcyonalne do $\frac{1}{r^2}$,

Mając na myśli całą przestrzeń, zawsze też założenie to domyślnie uczynimy.

§ 43. Dla *półprzewodnika* nieruchomego mamy (§ 19), zamiast (110′):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \mathbf{E}.\mathbf{E} + \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \tag{111}$$

czyli, w wypadku izotropii:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda E^2 = - \operatorname{div} \mathbf{F}. \tag{111a}$$

Ponieważ $\lambda.E^2$ (w ogóle zaś $\lambda\mathbf{E}.\mathbf{E}$) wyraża ilość ciepła Joule'a wytwarzanego w półprzewodniku, na jednostkę czasu i objętości, i ponieważ energia U w tym wypadku nie przeistacza się oprócz cieplnej na żadną inną postać energii, przeto w myśl zasady zachowania powiemy znowu, że $\mathbf{F}$ czyli (z pominięciem dodatkowego wektora czysto solenoidalnego) $c\,\mathfrak{V}\mathbf{EM}$ wyraża prąd energii elektromagnetycznej.

Dla bryły półprzewodzącej, np. izotropowej, ograniczonej powierzchnią σ mamy:

$$\frac{dU}{dt} + \int \lambda E^2 . d\tau = -\int \mathbf{F}_\nu . d\sigma, \qquad (112)$$

jeżeli zaś wektor $\mathbf{F}$ jest styczny do tej powierzchni lub też, ogólniej, jeżeli jego całka powierzchniowa znika:

$$\frac{dU}{dt} + \int \lambda E^2 . d\tau = 0. \qquad (113)$$

Ponieważ λE^2 (i w ogóle $\mathbf{E}.\lambda\mathbf{E}$) jest dodatnie wszędzie i zawsze, i znika jedynie tylko dla $E = 0$, a więc dla $U_e = 0$, widzimy stąd bezpośrednio, że w tych warunkach cała energia elektromagnetyczna półprzewodnika maleje ustawicznie, bądź to dążąc do zupełnego zaniku, bądź też pozostawiając po sobie pewną resztę czysto magnetyczną.

Siły ponderomotoryczne.

§ 44. Według określenia, o którem już wspomniałem, wektor $\mathbf{E}$ byłby identyczny ze siłą mechaniczną czyli *ponderomotoryczną*, działającą na małą, wprowadzoną do danej dziedziny pola elektrostatycznego, bryłkę „wzorcową", która pierwotnie już była *naelektryzowana*, t. j. otoczona własnem polem elektrycznem skonstatowanem chociażby przez działanie mechaniczne na podobną bryłkę umieszczoną w danej odległości.

Otóż określenie to wymaga jeszcze pewnych uzupełnień.

Przedewszystkiem, aby zachować powyższe jego sformułowanie, należałoby dodać, że substancya samej bryłki jest, pod względem elektrycznym przynajmniej, *taka sama jak otaczającego ją środowiska*, i że samo to środowisko, w którem roztacza się pole, jest jednorodne, tak aby bryłka wraz ze swem otoczeniem stanowiła społem środowisko jednorodne. W przeciwnym bowiem razie bryłka *nie*naelektryzowana, jak uczy doświadczenie, podlegałaby również, w temże polu, pewnej sile mechanicznej, i to o kierunku innym zgoła, niż gdyby była naelektryzowana.

Dwie te siły mechaniczne, z których pierwsza zależy od elektryzacyi bryłki, druga od różnicy jej substancyi względem otoczenia, superponują się wzajemnie, t. j. dodają się wektorowo. Chcąc tedy użyć jako „wzorca“ pewnej bryłki *różnej* w ogóle od środowiska, należałoby przedewszystkiem zmierzyć siłę mechaniczną, powiedzmy $\mathbf{S}_0$, która działa na nią, w danem miejscu pola, wówczas gdy jest *nie*naelektryzowana, następnie siłę mechaniczną $\mathbf{S}$, która w temże miejscu działa na tęż samą bryłkę, lecz uprzednio *naelektryzowaną* w pewien odpowiedni sposób, wreszcie odjąć (wektorowo) siłę $\mathbf{S}_0$ od siły $\mathbf{S}$. Ta dopiero różnica wektorów

$$\mathbf{S} - \mathbf{S}_0$$

będzie się zachowywała, jak to, co w § 5 nazwaliśmy „siłą mechaniczną $\mathbf{F}$“.

Jeżeli mianowicie zbadamy nasamprzód pole elektryczne za pomocą bryłki a, naelektryzowanej w pewien „wzorcowy“ sposób i położymy

$$\mathbf{S} - \mathbf{S}_0 = \mathbf{E},$$

upatrując w tem równaniu określenie naszego wektora elektrycznego $\mathbf{E}$, a następnie zbadamy toż samo pole za pomocą innej bryłki a', lub za pomocą tej samej bryłki lecz *naelektryzowanej inaczej*, natenczas otrzymamy dla wektora $\mathbf{S} - \mathbf{S}_0$ kierunki te same, lecz natężenia różne od poprzednich, a to w każdym punkcie pola; wszystkie te natężenia będą atoli *proporcyonalne* do poprzednich.

Dla jakiejkolwiek tedy bryłki naelektryzowanej a' możemy położyć

(114) $$\mathbf{S} - \mathbf{S}_0 = n\mathbf{E},$$

gdzie n jest wielkością *skalarną* jednakową dla wszystkich punktów pola i charakteryzującą bryłkę a' w porównaniu z bryłką a wzorcowo naelektryzowaną.

Bryłka wzorcowa a, służąca do eksploracyi pola elektrycznego, ma być pierwotnie naelektryzowaną, t. j. otoczoną pewnem własnem polem elektrycznem, powiedzmy $\mathbf{E}_a$; całkę powierzchniową wektora $\mathbf{E}_a$, obliczoną w próżni, czyli indukcyę całkowitą przez powierzchnię, otaczającą zupełnie wzorcową tę bryłkę a, uważamy jako równą jedności:

$$e_a = \int \mathbf{E}_a \nu . d\sigma = 1,$$

co stanowi konwencyę dowolną. Nie wystarcza jednak, aby całka ta była określoną i aby pole własne naszej bryłki było scharakteryzowane jako *radyalne*. Należy dodać jeszcze warunek, że pole

to ma być *dość słabe, aby nie odkształcać w widocznym stopniu* pola $\mathbf{E}$, do którego mamy bryłkę a wprowadzić. Warunek ten jest oczywiście względny i implikuje liczne fakty doświadczalne dotyczące pól elektrycznych poddawanych badaniu.

Powyższa całka określi też t. zw. „jednostkę elektryczności“ (prawdziwej), którą np. możemy sobie pomyśleć jako rozmieszczoną jednostajnie w małej kulce stanowiącej wzorzec a lub, ogólniej, w jednostajnych warstwach koncentrycznych z tą kulką, od jej środka aż do powierzchni.

Przypuśćmy teraz, że bryłka a' posiada ładunek prawdziwy e', t. j. że jest ona otoczona polem własnem $\mathbf{E}'$, które daje w próżni wartość całki $\int_{(a')} \mathbf{E}'_\nu . d\sigma = e'$, czyli, w dowolnem środowisku:

$$\int_{(a')} \mathbf{D}'_\nu . d\sigma = e'.$$

Natenczas można uważać jako fakt doświadczalny, że siła mechaniczna $\mathbf{S} - \mathbf{S}_0$, jest, w jednem i tem samem polu $\mathbf{E}$, dla bryłki a' większa e' razy niż dla bryłki wzorcowej a, t. j. że (wobec przyjętej jednostki ładunku $e_a = 1$) czynnik skalarny n we wzorze (114) równa się ładunkowi e'. Możemy tedy napisać:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}.e' + \mathbf{S}_0. \tag{115}$$

Zakładając, że bryłka a' jest izolatorem i że wewnątrz niej nie istnieją powierzchnie nieciągłości, t. j. że ładunek e' jest w niej rozmieszczony *przestrzennie*, możemy napisać $e' = \int \rho' . d\tau'$, gdzie $\rho' = div\, \mathbf{D}'$, a więc powiedzieć, że na każdy element objętości $d\tau'$ tej bryłki działa w polu elektrostatycznem $\mathbf{E}$ siła ponderomotoryczna, (powiedzmy $\mathbf{P}_e d\tau'$):

$$\mathbf{P}_e d\tau' = \left(\mathbf{E}. div\, \mathbf{D}' + \mathbf{s}_0 \right) d\tau', \tag{116}$$

gdzie $\mathbf{s}_0 . d\tau'$ ma oznaczać siłę, jaka działałaby na tenże element, gdyby nie był naelektryzowany. Działanie mechaniczne pola na elementy *powierzchni*, a mianowicie powierzchni granicznej dwóch różnych dielektryków izolujących lub dielektryka i przewodnika, omówimy oddzielnie, w Rozdziale IV.

Linie elektryczne pola zewnętrznego przenikają w ogóle również do wnętrza ciała a'; jeżeli jednak polaryzacya $\mathbf{D} = K\mathbf{E}$ posiada w rozważanem miejscu tego pola rozmieszczenie solenoidalne, natenczas możemy przez $div\, \mathbf{D}'$ w (116) rozumieć bądź to rozbie-

żność polaryzacyi własnej ciała a', bądź też rozbieżność obliczoną dla superpozycyi pola własnego ciała a' i pola $\mathbf{E}$, do któregośmy je wprowadzili. Dwie te wielkości byłyby natomiast różne od siebie we wszystkich tych miejscach pola, w których rozmieszczenie polaryzacyi nie jest solenoidalne.

Można atoli twierdzić, że doświadczenia mające sprawdzać wzór (116), a raczej (115), były w rzeczywistości dokonywane w dziedzinach *solenoidalnych* pola, t. j. pozbawionych ładunku *). Uogólniając tedy i uważając „bryłkę a'“ poprostu jako część środowiska dielektrycznego, możemy powiedzieć, że na każdy element $d\tau$ dielektryka, który jest siedliskiem pola elektrostatycznego $\mathbf{E}$, działa siła ponderomotoryczna

$$\mathbf{P}_e d\tau = \left(\mathbf{E}\, div\, \mathbf{D} + \mathbf{s}_0\right) d\tau$$

czyli, *na jednostkę objętości:*

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{E}.\, div\, \mathbf{D} + \mathbf{s}_0 = \mathbf{E}\rho + \mathbf{s}_0, \tag{117}$$

gdzie $\mathbf{D} = K\mathbf{E}$ jest odpowiednią polaryzacyą, ρ zaś jest oznaczoną już tak samo powyżej gęstością przestrzenną ładunku prawdziwego.

§ 45. W poprzednim paragrafie pragnęliśmy pierwszą część siły ponderomotorycznej $\mathbf{P}_e$, to jest $\mathbf{E}\rho$, wprowadzić w związek z działaniem na bryłkę wzorcową, gdyż na tem to właśnie działaniu ma się opierać pierwotne *określenie* wektora elektrycznego $\mathbf{E}$.

Skoro jednak zgodziliśmy się już w § 39, a następnie w § 41, na to, aby uważać całkę $U_e = \frac{1}{2}\int \mathbf{ED}.d\tau$ jako wyraz *energii* pola elektrycznego i, ogólniej, całkę

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\int (\mathbf{ED} + \mathbf{MB})\, d\tau \tag{IV}$$

jako wyraz *energii* dowolnego pola elektromagnetycznego, powinniśmy z postaci tego wzoru, i opierając się na zasadzie zachowania energii, wyprowadzić nietylko ową pierwszą część siły ponderomotorycznej $\mathbf{P}_e$ i okazać identyczność jej z powyższym iloczynem, lecz również

---

*) W klasycznych doświadczeniach *Coulomba* (z wagą skręceń), stwierdzających proporcyonalność odpychania lub przyciągania do ładunku każdej z dwóch kulek oddzielonych od siebie środowiskiem izotropowem i jednorodnem, a mianowicie powietrzem, warunek ten z pewnością był spełniony.

drugą jej część $\mathfrak{s}_0$, odpowiadającą niejednorodności środowiska, i w ogóle *całą siłę ponderomotoryczną* $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_e + \mathfrak{P}_m$ pochodzenia po części elektrycznego, po części magnetycznego.

Otóż uczynimy to obecnie, ograniczając rozważania nasze do środowiska *przestrzennie ciągłego*, acz w ogóle *niejednorodnego*, i do takich tylko przesunięć wirtualnych jego cząstek, przy których ciągłość jego nie zostaje zerwana i przy których zmieniają się wprawdzie wartości spółczynników *lokalne*, t. j. w nieruchomym elemencie przestrzeni lub pola, lecz *pozostają niezmienne w każdej indywidualnej cząstce środowiska*. Powierzchnie nieciągłości omówimy w Rozdziale IV.

Zakładamy zresztą, że pole obejmuje całą przestrzeń i, jak zwykle, że w nieskończoności natężenia wektorów $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, a więc też $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ maleją jak $1/r^2$.

Niechaj wektor nieskończonostkowy $\delta\mathfrak{a}$ wyobraża co do wielkości i kierunku przesunięcie dowolnego elementu środowiska, tak iż $\delta W = \int \mathfrak{P}.\delta\mathfrak{a}.d\tau$ będzie *pracą mechaniczną* wykonaną przez całe pole; odpowiednią zmianę jego energii oznaczmy przez δU, pisząc tedy

$$\delta U = \tfrac{1}{2}\int (\mathfrak{E}.\delta\mathfrak{D} + \mathfrak{D}.\delta\mathfrak{E} + \mathfrak{M}.\delta\mathfrak{B} + \mathfrak{B}.\delta\mathfrak{M})d\tau \qquad (118)$$

i rozumiejąc przez $\delta\mathfrak{E}$ i t. d. zmiany *lokalne* wektorów, zachodzące dzięki przesunięciom.

Otóż, pracę δW przyrównamy ubytkowi energii pola, t. j. położymy

$$\int \mathfrak{P}\delta\mathfrak{a}.d\tau + \delta U = 0, \qquad (119)$$

pod warunkiem atoli, że *prawdziwy ładunek elektryczny każdej indywidualnej cząstki środowiska pozostaje niezmienny przy przesunięciu wirtualnem*, i że to samo dotyczy *prawdziwego „ładunku magnetycznego", który zresztą znika wszędzie*. Pod tym bowiem tylko warunkiem pole pracuje bez doprowadzanych zzewnątrz zasiłków energii *).

---

*) Warunek ten obliczania pracy ze zmiany wielkości U jest, w wypadku pola elektrostatycznego np., zgodny ze stałością ładunku okładek kondensatora pracującego mechanicznie, na którym staraliśmy się w § 38 oprzeć wyraz U_e energii elektrycznej. Przy niezmiennych *potencyałach* okładek praca byłaby równa nie ubytkowi lecz przyrostowi energii U_e; porówn. Rozdział IV. Ostatecznie należy powyższy warunek niezmienności ładunków uważać jako element zaczerpnięty z doświadczenia.

Pośród przesunięć, czyniących zadość temu warunkowi, znajdują się z pewnością *wszystkie te* przesunięcia $\delta\mathbf{a}$, przy których *pozostają niezmienne* indukcya elektryczna $\mathbf{D}\nu.d\sigma$ i indukcya magnetyczna $\mathbf{B}\nu.d\sigma$ przez każdy element powierzchniowy $d\sigma$ (o normalnej ν), *składający się zawsze z tych samych cząstek środowiska.* Ładunek bowiem danej cząstki równa się indukcyi przez jej powierzchnię.

Otóż, pojęte w ten sposób zmiany indukcyi będą, według § 9 [wzór (24)], w którym należy tylko zastąpić $\frac{\partial}{\partial t}$ przez δ i $\mathbf{v}$ przez $\delta\mathbf{a}$:

$$(\delta\mathbf{D} + div\ \mathbf{D}.\delta\mathbf{a} + curl\ \mathrm{V}\mathbf{D}\delta\mathbf{a})\nu.d\sigma$$

$$(\delta\mathbf{B} + curl\ \mathrm{V}\mathbf{B}\,\delta\mathbf{a})\nu.d\sigma \quad \text{(albowiem } div\ \mathbf{B} = 0\text{)};$$

kładąc więc zmiany te równe zeru, dla wszelkich $d\sigma$, i pisząc $div\ \mathbf{D} = \rho$, otrzymamy:

$$(120) \qquad \begin{cases} \delta\mathbf{D} = -\rho\,\delta\mathbf{a} - curl\ \mathrm{V}\mathbf{D}\,\delta\mathbf{a} \\ \delta\mathbf{B} = -curl\ \mathrm{V}\mathbf{B}\,\delta\mathbf{a}. \end{cases}$$

Odtąd założymy, że środowisko jest *izotropowe* (acz niejednorodne), że więc $\mathbf{D} = K.\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu.\mathbf{M}$, gdzie K, μ są zwykłemi spółczynnikami skalarnemi. Wówczas będzie:

$$\mathbf{D}.\delta\mathbf{E} = K.\mathbf{E}.\delta\mathbf{E} = \mathbf{E}.\delta(K\mathbf{E}) - E^2.\delta\mathrm{K} = \mathbf{E}.\delta\mathbf{D} - E^2\delta K$$

i podobnie $\mathbf{B}.\delta\mathbf{M} = \mathbf{M}.\delta\mathbf{B} - \mathbf{M}^2.\delta\mu$,

gdzie δK, $\delta\mu$ są zmianami *lokalnemi* spółczynników dzięki przesunięciu $\delta\mathbf{a}$; ponieważ zaś spółczynniki te mają być niezmienne w każdej indywidualnej cząstce środowiska, przeto według uwag rozwiniętych we *Wstępie* (str. 50):

$$(121) \qquad \delta K = -\delta\mathbf{a}.\nabla\mathrm{K}, \quad \delta\mu = -\delta\mathbf{a}.\nabla\mu,$$

a więc:

$$\mathbf{D}.\delta\mathbf{E} = \mathbf{E}.\delta\mathbf{D} + \mathrm{E}^2.\nabla\mathrm{K}.\delta\mathbf{a}, \quad \mathbf{B}.\delta\mathbf{M} = \mathbf{M}.\delta\mathbf{B} + \mathrm{M}^2.\nabla\mu..\delta\mathbf{a},$$

tak iż według (118) i (119) mamy:

$$\int\left[\mathbf{E}\delta\mathbf{D} + \mathbf{M}\delta\mathbf{B} + \left(\tfrac{1}{2}E^2\nabla K + \tfrac{1}{2}M^2\triangle\mu + \mathbf{P}\right)\delta\mathbf{a}\right]d\tau = 0.$$

Podstawiając tu zaś $\delta\mathbf{D}$ i $\delta\mathbf{B}$ ze (120) i uwzględniając, że

$$\int \mathbf{E}\,\mathrm{curl}\,\mathrm{V}\mathbf{D}\delta\mathbf{a}.d\tau = \int \mathrm{curl}\,\mathbf{E}.\mathrm{V}\mathbf{D}\delta\mathbf{a}.d\tau = -\int \delta\mathbf{a}.\mathrm{V}\mathbf{D}\,curl\,\mathbf{E}.d\tau\ ^{*})$$

i podobnie $\int \mathbf{M}\,curl\,\mathrm{V}\mathbf{B}\delta\mathbf{a}.d\tau = -\int \delta\mathbf{a}.\mathrm{V}\mathbf{B}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{M}.d\tau$, otrzymamy wreszcie

$$\int \left(\mathbf{P} - \mathbf{E}\rho + \tfrac{1}{2}E^2\nabla K + \tfrac{1}{2}M^2\nabla\mu + \mathrm{V}\mathbf{D}\,curl\,\mathbf{E} + \mathrm{V}\mathbf{B}\,curl\,\mathbf{M}\right)\delta\mathbf{a} = 0.$$

Ponieważ zaś równanie to ma być spełnione dla *wszelkich* przesunięć $\delta\mathbf{a}$ (wszystkie bowiem wiążące je warunki uwzględniliśmy już), przeto wyraz wektorowy, ujęty w nawiasy, musi znikać dla każdego z osobna punktu pola; mamy tedy dla poszukiwanej *siły ponderomotorycznej*, liczonej na jednostkę objętości:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\rho - \tfrac{1}{2}E^2\nabla K - \mathrm{V}\mathbf{D}\,curl\,\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}M^2\nabla\mu - \mathrm{V}\mathbf{B}\,curl\,\mathbf{M}. \quad (\mathrm{V})$$

W polu czysto elektrycznem, niewirowem, a więc statycznem, siła ta redukuje się do pierwszych dwóch wyrazów. Pierwszy wyraz, identyczny z pierwszą częścią siły $\mathbf{P}_e$ w (117), daje działanie pola na cząstki *naelektryzowane* środowiska i jest wektorem o kierunku $\pm\mathbf{E}$, zależnie od tego czy ładunek jest dodatni czy też ujemny. Drugi wyraz $-\frac{1}{2}E^2\nabla K$ stanowi to, co w § 44 oznaczyliśmy przez $\mathbf{s}_0$; odpowiadająca mu siła ponderomotoryczna znika w środowisku jednorodnem, w środowisku zaś *niejednorodnem* posiada kierunek najszybszego spadku spółczynnika dielektrycznego K i natężenie proporcyonalne do tego spadku (na jednostkę długości) i do kwadratu natężenia siły elektrycznej, tak iż kierunek tej siły mechanicznej jest od kierunku wektora $\mathbf{E}$ zupełnie niezależny.

Dodajnik czwarty $-\frac{1}{2}M^2\nabla\mu$ wyraża analogiczną siłę mechaniczną w polu magnetycznem, zależną w podobny zupełnie sposób od natężenia tego pola i od spadku przenikliwości magnetycznej μ.

Do sił, tych, zależnych od niejednorodności środowiska, wrócimy jeszcze w Rozdziale IV, aby rozważyć je w zastosowaniu do pewnych wypadków szczególnych.

Dodajniki trzeci i piąty wreszcie wyrażałyby siły ponderomotoryczne na *te* elementy środowiska, które są siedliskami wirów

---

*) Przejście od pierwszej do drugiej całki otrzymamy na podstawie wzoru (98) rozwiniętego we *Wstępie*, jeżeli skorzystamy z Twierdzenia VIa i uwzględnimy, że całka powierzchniowa wektora $\mathrm{V}\mathbf{E}\,\mathrm{V}\mathbf{D}\delta\mathbf{a}$ dla bezgranicznie rosnącej kuli znika. Przejście zaś od drugiej do trzeciej całki opiera się na Twierdzeniu III, str. 14.

elektrycznych, względnie magnetycznych, a kierunki ich byłyby normalne do polaryzacyi **D**, względnie **B**, i do wirów elektrycznych, względnie magnetycznych. Siłami temi, a szczególniej ostatnią, wypadnie nam niejednokrotnie jeszcze w ciągu dalszym zająć się szczegółowiej.

§ 46. Powyższy wzór (V) dla siły ponderomotorycznej wyprowadziliśmy (dla dowolnego środowiska ciągłego i izotropowego) z wyrazu (IV) energii elektromagnetycznej w założeniu, że podczas przesunięć wirtualnych elementy środowiska zachowują indywidualne swe ładunki, *zupełnie jednak niezależnie od praw zasadniczych* I i II czyli od równoważnych im równań różniczkowych pola (A) i (B) podanych na początku Rozdziału II, w § 11.

Jeżeli jednak zgodzimy się na te prawa Maxwellowskie i wprowadzimy obecnie według (A) i (B) prądy elektryczny i magnetyczny, zamiast wirów, do piątego i trzeciego dodajnika we wzorze (V), otrzymamy:

$$\text{(VI)} \qquad \mathbf{P} = \mathbf{E}\rho - \tfrac{1}{2}(E^2.\nabla K + M^2\nabla\mu) + \frac{1}{c}\,\mathrm{V}\mathbf{pB} + \frac{1}{c}\,\mathrm{V}\mathbf{Dq}.$$

Siła $\frac{1}{c}\,\mathrm{V}\mathbf{pB}$, którą za przykładem Maxwella można nazwać *siłą elektromagnetyczną*, działa na te części środowiska, w których istnieje prąd elektryczny, a mianowicie w kierunku normalnym do tego prądu i do polaryzacyi magnetycznej, określonym bliżej przez porządek liter w iloczynie wektorowym. W półprzewodniku nieruchomym cały prąd elektryczny składa się z prądu przesunięcia $\dot{\mathbf{D}}$ i z prądu przewodzonego $\lambda\mathbf{E}$, tak iż mamy $\frac{1}{c}\,\mathrm{V}\dot{\mathbf{D}}\mathbf{B} + \frac{\lambda}{c}\,\mathrm{V}\mathbf{EB}$; najdawniej zresztą znaną i najlepiej stwierdzoną doświadczalnie jest druga część tego wyrazu, t. j. siła działająca w polu magnetycznem na prąd elektryczny przewodzony. Co do pierwszej części, t. j. działania pola magnetycznego na prąd przesunięcia elektrycznego, można, o ile wiem, tyle tylko powiedzieć, że doświadczenia przemawiają za jego istnieniem, lecz nie wystarczają do stwierdzenia jego wyrazu ilościowego; doświadczenia odpowiednie są trudne ze względu na trudności otrzymania stosunkowo długotrwałych prądów przesunięcia $\dot{\mathbf{D}}$ o dość wielkiem natężeniu. Dla środowiska *ruchomego* mielibyśmy jeszcze, według wzoru (29), § 10, siłę mechaniczną $\frac{\rho}{c}\,\mathrm{V}\mathbf{vB}$ na prąd konwekcyjny i siłę $\frac{1}{c}\,\mathrm{V}\mathbf{RB}$ na tak zwany „prąd Röntgena“ $\mathbf{R} = \mathit{curl}\,\mathrm{V}\mathbf{Dv}$. Co do zgodności z doświadczeniem, o siłach tych można powiedzieć to samo, co o sile na prąd przesunięcia. Co do równoważności tych prądów ze zwy-

kłym prądem przewodzonym, zaznaczę tu tylko, że siły magnetyczne, towarzyszące prądowi *konwekcyjnemu*, stwierdził po raz pierwszy *Rowland* w słynnych swych doświadczeniach (1878), który też później (1889) zbadał je ilościowo wraz z *Hutchinsonem*, że co do prądu **R** uczynił to *Röntgen* (1888), skąd też nazwa „prądu Röntgena", że wreszcie w ostatnich czasach (1903) *Eichenwald* zbadał ilościowo „skutki" magnetyczne zarówno prądu konwekcyjnego i prądu Röntgena, jakoteż i prądu przesunięcia *). Pobieżne chociażby omówienie tych badań doświadczalnych wykracza atoli po za ramy niniejszego dzieła.

Ostatnią część $\frac{1}{c}$ V**Dq** siły ponderomotorycznej (VI) możnaby, za przykładem Heaviside'a i analogicznie do siły „elektromagnetycznej" $\frac{1}{c}$ V**pB**, nazwać *siłą magnetoelektryczną*.

W wypadku ogólnym, t. j. dla poruszającego się środowiska, mamy według (25), § 9: $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{B}} + curl\ \mathrm{V}\mathbf{Bv}$, a więc dla siły „magnetoelektrycznej" wyraz

$$\frac{1}{c}\ \mathrm{V}\mathbf{D}\dot{\mathbf{B}} + \frac{1}{c}\ \mathrm{V}\mathbf{DQ}, \text{ gdzie } \mathbf{Q} = curl\ \mathrm{V}\mathbf{Bv}; \qquad (122)$$

pierwszą część tej siły ponderomotorycznej, mającej wyrażać działanie pola elektrycznego na elementy środowiska, które są siedliskiem zmiennej w czasie polaryzacyi magnetycznej, *Poincaré* nazwał siłą *Hertzowską* **). O ile jednak sięgają dotychczasowe wiadomości, należy całą tę siłę ponderomotoryczną $\frac{1}{c}$ V**Dq** uważać jako fikcyjną. Pomimo to rozważenie jej nie jest pozbawione pewnego znaczenia, chociażby ze względu na analogię do siły $\frac{1}{c}$ V**pB**.

---

*) *H. A. Rowland: On the magnetic effect of electric convection.* Americ. Journ. of Science. (3) 15 (1878), str. 30.

Rowland i *C. T. Hutchinson: On the elmgnt. effect of convection-currents.* Phil. Mag. (5) 27 (1889), str. 445.

W. C. Röntgen: Ueber d. durch Bewegung eines im homogenen elektrischen Felde befindlichen Dielektricums hervorgerufene elektrodynamische Kraft. Annalen der Physik. u. Chemie, 35 (1888), str. 264; tudzież Ann. Phys. Chem., 40 (1890), str. 93.

A. Eichemwald: Ueb. d. magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde. Ann. Phys. Chem., (4) 11 (1903), str. 1,421.

Pełniejsze zestawienie dotyczącej literatury wraz z pobieżnem jej omówieniem czytelnik znajdzie w tomie V_2 (Zesz. 1) dzieła zbiorowego *Encyklopaedie d. mathem. Wissenschaften*, Lipsk, u Teubnera, 1904, w artykule *H. A. Lorentza: Maxwells elektromagn. Theorie*, str. 97—98.

**) Porówn. *Encykl. d. math. Wiss.*, loco cit., str. 112, lub też: *Poincaré, Electricité et optique*, wyd. 2-gie.

§ 47. Wracając do pierwotnej postaci (V) siły ponderomotorycznej, pragnąłbym w tem już miejscu zauważyć, że w polu *magnetostatycznem* mamy wprawdzie *w ogóle* $curl\ \mathbf{M} = 0$, lecz że na równanie to zgodzić się nie można, o ile chodzi o wnętrze tak zwanych *magnesów właściwych*, czyli „brył trwale namagnesowanych"; dla ciał takich, zwanych też *ferromagnetycznemi* (ze względu na to, że należy do nich przedewszystkiem żelazo), należy raczej położyć, w stanie równowagi: $curl\ \mathbf{M} = curl\ \mathbf{m} \neq 0$, gdzie $\mathbf{m}$ jest pewnym wektorem zwanym siłą magnetyczną *przyłożoną* *), zaś w polu zmiennem w czasie, zamiast (A): $\text{curl}\ (\mathbf{M} - \mathbf{m}) = \frac{1}{c}\mathbf{p}$; z tego też równania należy skorzystać, dla wyrugowania $curl\ \mathbf{M}$ w ostatnim wyrazie wzoru (V). O sile tej $\mathbf{m}$, tudzież o analogicznej sile elektrycznej i w ogóle o „siłach przyłożonych" powiemy nieco więcej w ciągu dalszym, wprowadzając je w związek ze „źródłami energii".

§ 48. Jeżeli środowisko jest *jednorodne* i pozbawione ładunku prawdziwego, t. j. $\nabla K = \nabla\mu = 0$, $\rho = 0$, siła ponderomotoryczna $\mathbf{P}$ redukuje się, według (VI), do

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c}\,(V\mathbf{pB} + V\mathbf{Dq}). \tag{123}$$

Otóż, godnem jest uwagi, że dla dielektryka *doskonale izolującego* i *nieruchomego* siła ta ponderomotoryczna daje się przedstawić przez *pochodną ze względu na czas t* pewnego wyrazu wektorowego. Istotnie, dla środowiska takiego mamy $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{D}}$, $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{B}}$, a więc, zamiast (123), $\mathbf{P} = \frac{1}{c}\,(V\dot{\mathbf{D}}\mathbf{B} + V\mathbf{D}\dot{\mathbf{B}})$, czyli:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,V\mathbf{DB}. \tag{124}$$

W środowisku *izotropowem* mamy jeszcze $\mathbf{D} = K.\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu.\mathbf{M}$, gdzie K, μ są zwykłemi spółczynnikami skalarnemi; pisząc więc, jak poprzednio, $c/\sqrt{K\mu} = v$ i wprowadzając, według § 42, prąd energii elektromagnetycznej $\mathbf{F} = cV\mathbf{EM}$, otrzymamy dla takiego środowiska:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\mathbf{F}}{v^2}. \tag{125}$$

---

*) *impressed force*—po angielsku, *eingeprägte Kraft*—po niemiecku.

Dla *próżni*, czyli dla t. zw. „*eteru*“ nieskażonego obecnością cząsteczek materyi ważkiej, wzór ten zachodziłby również, redukując się do

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}. \qquad (125a)$$

W związku z tym wyrazem przypuszczalnej siły ponderomotorycznej, mającej działać na elementy „eteru“ przy *zmiennem* polu elektromagnetycznem, *Helmholtz* *), a po nim inni fizycy roztrząsali sprawę „możliwych ruchów czystego eteru“. Wszystkie atoli poczynione w tym kierunku doświadczenia dały wyniki ujemne. W nowszych zresztą czasach zaczęto hołdować poglądowi, według którego eter, jako hypotetyczne podłoże zjawisk elektromagnetycznych, a więc też świetlnych i t. p., jest w ogóle pozbawiony możności poruszania się; w tych zaś warunkach dopuszczenie jakiejkolwiek w ogóle „siły ponderomotorycznej“, mającej działać na jego elementy, prowadzi do najbardziej zasadniczych trudności. Na płynące stąd zarzuty przeciw ogólnemu wyrazowi (V) lub (VI) siły **P** możnaby zresztą odpowiedzieć, że „eter“ jest zbyteczną fikcyą, że dość jest stwierdzić poprostu, iż przestrzeń próżna (t. j. ta, w której nie możemy dopatrzeć się żadnych śladów materyi w zwykłem znaczeniu słowa) jest pod względem elektromagnetycznem jednorodna i izotropowa i że zaburzenia elektromagnetyczne przenoszą się w niej z pewną skończoną prędkością (c),—że wreszcie „przesunięcia $\delta\mathbf{a}$“, o ile chodzi o *próżną przestrzeń*, są pustem brzmieniem, pozbawionem wszelkiej zgoła treści, tak iż powyższy rachunek, prowadzący do wzoru (V), daje się wprawdzie zastosować do środowisk i brył materyalnych w zwykłem znaczeniu słowa, lecz traci wszelki sens dla przestrzeni próżnej.

Zaznaczę tu raz jeszcze, że pierwotny nasz wzór (V) jest niezależny od równań Maxwellowskich (A), (B), [które są dopiero uwzględnione w (VI)], a więc od równań nie zdających dobrze sprawy, jak już wspomniałem, ze zjawisk w środowiskach ruchomych (aberacya i t. p.); odrzucając tedy nawet równania różniczkowe Maxwella, możnaby pomimo to zgodzić się na wzór (V) siły ponderomotorycznej w środowiskach ważkich dowolnych, a więc też na równoważne sile tej „ciśnienia i napięcia“ Maxwellowskie, które niebawem poznamy.

§ 49. Działanie pola elektromagnetycznego na elementy środowiska izotropowego, jakie rozpatrywaliśmy powyżej, streszcza

---

*) Ann. Phys. Chem., 53 (1894), lub też *Wissenschaftl. Abhandlungen*, t. III.

się całkowicie w sile ponderomotorycznej **P** przyczepionej do pewnego punktu każdego elementu.

W ciałach *anizotropowych* czyli *krystalicznych* mamy natomiast oprócz siły takiej jeszcze *parę sił*, działającą na dany element i dążącą do wprawienia go w ruch obrotowy naokoło pewnej osi, a którą wyprowadzimy obecnie również z wyrazu energii pola.

Niechaj wektor **L** wyobraża *moment obrotu* pary sił co do wielkości i kierunku osi obrotu, liczony na jednostkę objętości, zaś wektor $\delta\Theta$ niechaj wyobraża obrót wirtualny danej cząstki ($d\tau$) kryształu o nieskończenie mały kąt naokoło osi, zlewającej się z kierunkiem $\delta\Theta$. Wówczas odpowiednia praca mechaniczna będzie $\mathbf{L}\delta\Theta.d\tau$, gdzie pierwsze dwa wyrazy (wektory) są pomnożone przez się skalarnie.

Dla ciała izotropowego mieliśmy, w § 45:

$$\mathbf{D}\delta\mathbf{E} = K\mathbf{E}.\delta\mathbf{E} = \mathbf{E}.\delta\mathbf{D} - \mathbf{E}.\delta K.\mathbf{E} = \mathbf{E}.\delta\mathbf{D} - E^2.\delta K,$$

gdyż K miało tam znaczenie zwykłego spółczynnika skalarnego. Jeżeli natomiast K jest *operatorem wektorowym*, możemy tylko napisać

$$\mathbf{D}.\delta\mathbf{E} = \mathbf{E}.\delta\mathbf{D} - \mathbf{E}.(\delta\mathrm{K})\mathbf{E}, \tag{126}$$

gdzie δK oznacza zmianę operatora, towarzyszącą przesunięciu i obrotowi cząstki kryształu, a więc również pewien operator wektorowy liniowy, którym należy działać na wektorze **E**, aby następnie otrzymany tym sposobem wynik (wektor) pomnożyć skalarnie przez **E**.

Uwydatniając zależność od przesunięcia postępowego, względnie od czystego obrotu cząstki, za pomocą wskaźników $_a$, $_\theta$ przy symbolu δ, możemy napisać:

$$\mathbf{D}.\delta\mathbf{E} = \mathbf{E}.\delta\mathbf{D} - \mathbf{E}.(\delta_a K)\mathbf{E} - \mathbf{E}.(\delta_\theta \mathrm{K})\mathbf{E},$$

a więc:

$$\tfrac{1}{2}\,\delta(\mathbf{ED}) = \mathbf{E}.\delta\mathbf{D} - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{E}.(\delta_a K)\mathbf{E} - \mathbf{E}.(\delta_\theta K)\mathbf{E};$$

zamiast drugiego wyrazu po lewej stronie możemy napisać analogicznie do § 45, tym razem jednak ogólniej

$$+\,\delta\mathbf{a}.\nabla_k(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{E}.K\mathbf{E}) \text{ czyli } \delta\mathbf{a}.\nabla_k(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{E}.\mathbf{D}),$$

gdzie wskaźnik k przy operatorze ∇ ma wyrażać, że należy działać nim jedynie na K (czyli po rozwinięciu, na K_{11} i t. d.), nie tykając samego wektora **E**; otrzymamy tedy

$$\tfrac{1}{2}\,\delta(\mathbf{ED}) = \mathbf{E}.\delta\mathbf{D} + \delta a.\nabla_k(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{ED}) - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{E}.(\delta_\theta K)\mathbf{E} \qquad (127)$$

i podobne zupełnie rozwinięcie dla $\frac{1}{2}\,\delta(\mathbf{MB})$.

Ostatni wyraz po prawej stronie jest zmianą, jakiej doznaje iloczyn skalarny $\frac{1}{2}\,\mathbf{E}.K\mathbf{E}$ czyli $\frac{1}{2}\,\mathbf{ED}$ dzięki *obrotowi* cząstki kryształu, a wraz z nią osi głównych operatora K, podczas gdy siła elektryczna $\mathbf{E}$ pozostaje niezmienną co do wielkości i kierunku; możemy wyraz ten napisać krócej $\frac{1}{2}\,\delta_\theta(\mathbf{ED})$.

Otóż, aby wyrazić tę zmianę przez iloczyn skalarny wektora $\delta\Theta$ i pewnego innego wektora, rozważmy nasamprzód nieco ogólniej dwa różne wektory $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, położymy $K\mathbf{R} = \mathbf{R}'$, $K\mathbf{S} = \mathbf{S}'$, utwórzmy iloczyn skalarny

$$w = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{SR}' = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{S}.K\mathbf{R}$$

i obliczmy zmianę $\delta_\theta w$, jakiej doznaje ten iloczyn dzięki *obrotowi* $\delta\Theta$ osi operatora K, przy niezmiennych wektorach $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$.

Przedewszystkiem, ponieważ K jest operatorem (wektorowym liniowym) *symetrycznym*, mamy:

$$\mathbf{S}.K\mathbf{R} = \mathbf{R}.K\mathbf{S}, \text{ *)} \qquad (128)$$

a więc

$$w = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{SR}' = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{RS}'.$$

Następnie, zamiast powiedzieć, że wektory $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ są nieruchome, a układ osi głównych operatora K doznaje obrotu $\delta\Theta$, możemy uważać osie te jako nieruchome i powiedzieć, że wektory $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ doznają *obrotu* — $\delta\Theta$, przy *niezmiennych natężeniach* R, S. Otrzymamy wówczas (porówn. *Wstęp*, str. 52):

$$\begin{aligned}\delta_\theta w &= -\tfrac{1}{2}\,\delta_\theta K\mathbf{S}.\mathbf{R} - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{S}.K(\delta_\theta\mathbf{R})\\ &= -\tfrac{1}{2}\,\delta_\theta\mathbf{S}.K\mathbf{R} - \tfrac{1}{2}\,K\mathbf{S}.\delta_\theta\mathbf{R}, \text{ według (128),}\\ &= -\tfrac{1}{2}\,\mathbf{R}'.\mathrm{V}\delta\Theta\mathbf{S} - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{S}'.\mathrm{V}\delta\Theta\mathbf{R},\end{aligned}$$

---

*) Jeżeli bowiem, przy użyciu dowolnych osi prostokątnych $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, „składowe“ operatora K są K_{11}, K_{12}, K_{13} i K_{21}, i t. d., mamy:

$$\mathbf{S}.K\mathbf{R} = S_1(K_{11}R_1 + K_{12}R_2 + K_{13}R_3) + S_2(K_{21}R_1 + \ldots) + S_3(K_{31}R_1 + \ldots)$$

$$\mathbf{R}.K\mathbf{S} = R_1(K_{11}S_1 + K_{12}S_2 + K_{13}R_3) + R_2(K_{21}S_1 + \ldots) + R_3(K_{31}S_1 + \ldots)$$

a więc, ze względu na *symetryczność* K (porówn. *Wstęp*), t. j. ze względu na równości $K_{21} = K_{12}$, i t. d., otrzymamy $\mathbf{S}.K\mathbf{R} = \mathbf{R}.K\mathbf{S}$.

czyli, według Twierdz. III *(Wstęp)*:

$$(129) \qquad \delta_\theta w = \tfrac{1}{2}\,\delta_\theta(\mathbf{S}.K\mathbf{R}) = \tfrac{1}{2}\,\delta\Theta(\mathrm{V}\mathbf{R}'\mathbf{S} + \mathrm{V}\mathbf{S}'\mathbf{R}).$$

Stosując rozwinięcie to do naszego wypadku, w którym jest $\mathbf{R} = \mathbf{S} = \mathbf{E}$, otrzymamy:

$$(130) \qquad \tfrac{1}{2}\,\delta_\theta(\mathbf{ED}) = \tfrac{1}{2}\,\delta_\theta(\mathbf{E}.K\mathbf{E}) = \delta\Theta.\mathrm{V}\mathbf{DE},$$

a więc zamiast (127):

$$(131) \qquad \tfrac{1}{2}\,\delta(\mathbf{ED}) = \mathbf{E}.\delta\mathbf{D} + \tfrac{1}{2}\,\delta\mathbf{a}.\nabla_k(\mathbf{ED}) - \delta\Theta.\mathrm{V}\mathbf{DE}$$

i podobny zupełnie wzór dla $\frac{1}{2}\,\delta(\mathbf{MB})$.

Rozumując następnie jak w § 45, t. j. podstawiając $\delta\mathbf{D}$ i $\delta\mathbf{B}$ ze (120), pisząc równanie energetyczne

$$\delta U + \int (\mathbf{P}\delta\mathbf{a} + \mathbf{L}\delta\Theta)\,d\tau = \int \left[\tfrac{1}{2}\,\delta(\mathbf{ED} + \mathbf{MB}) + \mathbf{P}\delta\mathbf{a} + \mathbf{L}\delta\Theta \right] d\tau = 0$$

i korzystając ze wzoru (131) i analogicznego wzoru magnetycznego, otrzymamy wreszcie:

$$(132) \qquad \int \left[\begin{array}{l} \left(\mathbf{P} - \mathbf{E}\rho + \tfrac{1}{2}\,\nabla_k(\mathbf{ED}) + \tfrac{1}{2}\,\nabla_\mu(\mathbf{MB}) \right. \\ \qquad \left. + \mathrm{V}\mathbf{D}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E} + \mathrm{V}\mathbf{B}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{M} \right) \delta\mathbf{a} \\ \qquad + \left(\mathbf{L} - \mathrm{V}\mathbf{DE} - \mathrm{V}\mathbf{BM} \right) \delta\Theta \end{array} \right] d\tau = 0.$$

Gdyby wektory nieskończonostkowe $\delta\mathbf{a}$, $\delta\Theta$ były zupełnie od siebie niezależne, musielibyśmy bez żadnych dalszych zastrzeżeń przyrównać zeru z osobna obadwa wyrazy pomnożone przez $\delta\mathbf{a}$ i przez $\delta\Theta$, a więc otrzymalibyśmy stąd dwa wzory: jeden dla siły $\mathbf{P}$, drugi dla momentu $\mathbf{L}$. Lecz $\delta\Theta$, jako obrót elementarny, *zależy* od przesunięcia $\delta\mathbf{a}$, a mianowicie tak, iż jest $\delta\Theta = \frac{1}{2}\,curl\,(\delta\mathbf{a})$. Należałoby więc uwzględnić ten związek i przekształcić trzeci wiersz w (132), podobnie jak na str. 195, na $\frac{1}{2}\int \delta\mathbf{a}.\,\mathrm{curl}\,(\mathbf{L} - \mathrm{V}\mathbf{DE} - \mathrm{V}\mathbf{BM}).d\tau$, tak aby pozostało tylko $\delta\mathbf{a}$; kładąc wówczas *cały* czynnik wektorowy tegoż $\delta\mathbf{a}$ równym zeru, otrzymalibyśmy *jedyne* tylko równanie wektorowe dla sumy $\mathbf{P} + \frac{1}{2}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{L}$, to zaś nie wystarcza oczywiście do jednoznacznego określenia wektorów $\mathbf{P}$ *i* $\mathbf{L}$. Aby dopiąć tego, należałoby zgodzić się na pewne dodatkowe jeszcze założenie.

Otóż, jeżeli zgodzimy się na to, iż w ciałach *izotropowych* (elektrycznie i magnetycznie) moment elementarny $\mathbf{L}d\tau$ znika *), *możemy* w (132) przyrównać zeru z osobna wyraz pomnożony przez $\delta\mathbf{a}$ i wyraz pomnożony przez $\delta\Theta$. Wówczas otrzymamy:

$$\begin{cases} (V^a) & \mathbf{P} = \mathbf{E}\rho - \frac{1}{2}\nabla_k(\mathbf{ED}) - \frac{1}{2}\nabla\mu(\mathbf{MB}) - V\mathbf{D}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E} - V\mathbf{B}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{M} \\ (V^b) & \mathbf{L} = V\mathbf{DE} + V\mathbf{BM}. \end{cases}$$

Na wzory te, nie bacząc na dowolność powyższego rozkładu, zgodzimy się tu dla tego chociażby, iż (V^a) w wypadku izotropii redukuje się wprost do (V) i że (V^b) daje moment pary sił dla ciał anizotropowych identyczny z momentem podanym przez Maxwella **), a szczególniej dla tego, że ten właśnie moment, jak zobaczymy niebawem, wynika bezpośrednio z tego samego układu „napięć i ciśnień", za pomocą którego można zdać sprawę ze siły ponderomotorycznej $\mathbf{P}$, co również było niepodzielną zasługą Maxwella. Sam ten zaś układ ciśnień i napięć, czyli „wysił elektromagnetyczny", stanowi conajmniej narzędzie rachunkowe ze wszech miar użyteczne i dogodne.

Co do siły $\mathbf{P}$ w środowisku krystalicznem, dość będzie zauważyć tu, że różni się ona od siły ponderomotorycznej w środowisku izotropowem jedynie tylko ze względu na wyraz $-\frac{1}{2}\nabla_k(\mathbf{ED})$ i analogiczny wyraz magnetyczny. Uciekając się do roskładu $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ wzdłuż kierunków normalnych $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, mamy $\mathbf{ED} = E_1D_1 + E_2D_2 + E_3D_3$, $D_1 = K_{11}E_1 + K_{12}E_2 + K_{13}E_3$, i t. d., a więc ze względu na równości $K_{12} = K_{21}$, i t. d.:

$$\mathbf{ED} = K_{11}E_1^2 + 2K_{12}E_1E_2 + K_{22}E_2^2 + 2K_{23}E_2E_3 + \ldots,$$

tak iż

$$-\frac{1}{2}\nabla_k(\mathbf{ED}) = -\frac{1}{2}\Big(E_1^2.\nabla K_{11} + E_2^2.\nabla K_{22} + E_3^2.\nabla K_{33} + 2E_1E_2.\nabla K_{12} + 2E_2E_3.\nabla K_{23} + 2E_3E_1.\nabla K_{31}\Big); \tag{133}$$

zupełnie podobne rozwinięcie otrzymamy dla $-\frac{1}{2}\nabla_\mu(\mathbf{MB})$. Pamiętajmy, że K_{11}, K_{12} i t. d. są zwykłemi skalarami, tak iż ∇K_{11}, ∇K_{12} i t. d. są wektorami, a mianowicie:

---

*) A w ciałach takich kierunki $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{M}$ zlewają się ze sobą, tak iż $V\mathbf{DE} = V\mathbf{BM} = 0$.

**) *Electricity and Magnetism.* T. II.

$$\nabla K_{11} = \mathbf{i}\frac{\partial K_{11}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial K_{11}}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial K_{11}}{\partial z}, \text{ i t. d.,}$$

tak iż składowa siły ponderomotorycznej (133) w kierunku **i** np. będzie $-\frac{1}{2}\left(E_1^2\frac{\partial K_{11}}{\partial x} + \ldots + 2E_1E_2\frac{\partial K_{12}}{\partial x} + \ldots\right)$.

W wypadku izotropii mamy $K_{12} = K_{23} = K_{31} = 0$, $K_{11} = K_{22} = K_{33} = K$, tak iż (133) redukuje się do $-\frac{1}{2}E^2.\nabla K$, jak we wzorze (V). Dla kryształu *jednorodnego* siła ta znika oczywiście, nieinaczej jak dla jednorodnego środowiska izotropowego.

Co do momentu obrotowego **L**, zauważymy tu tylko, że składa on się z dwóch zupełnie podobnych części, jednej elektrycznej $\mathbf{L}_e = V\mathbf{DE}$, drugiej magnetycznej $\mathbf{L}_m = V\mathbf{BM}$. Oś momentu $\mathbf{L}_m$ jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej siłę magnetyczną i indukcyę magnetyczną; para sił wyobrażona przez $\mathbf{L}_m.d\tau$ starałaby się obrócić element $d\tau$ naokoło tej osi *od* kierunku indukcyi **B** *do* **M** (w stronę kąta *mniejszego* od π). Toż samo *mutatis mutandis*, dotyczy $\mathbf{L}_e$. Jeżeli **M** zlewa się z jedną z trzech osi głównych kryształu, natenczas **B** posiada tenże kierunek, tak iż $\mathbf{L}_m$ znika, dzięki zasadniczej własności iloczynu wektorowego. W ciałach izotropowych, kierunki **B** i **M**, względnie **D** i **E** zlewają się zawsze, tak iż dla ciał takich jest zawsze $\mathbf{L} = 0$ i pozostaje tylko siła **P**.

Wysił elektromagnetyczny.*

§ 50. Już *Faraday* w klasycznych swych „Badaniach doświadczalnych“ starał się zdać sprawę z działań mechanicznych pola elektrycznego (jak przyciąganie i odpychanie się wzajemne brył naelektryzowanych), przyjmując, że środowisko między ciałami naelektryzowanemi znajduje się w pewnym stanie wymuszonym, że „linie“ lub rurki siły elektrycznej zachowują się mianowicie tak, jak gdyby były *napięte* w swym kierunku *podłużnym* i starały się skrócić, a jednocześnie doznawały *ciśnienia* we wszystkich kierunkach *bocznych* i starały się rozprężyć i odepchnąć wzajemnie** („mutual

*) Przez *wysił* rozumiem tu w ogóle dowolny układ ciśnień i napięć; brzmieniem tem (o którem nie wiem zresztą, czy cieszy się uznaniem) chciałem spolszczyć to, co anglicy nazywają *stress*, niemcy zaś *Zwang*.

**) *M. Faraday: Experimental Researches in Electricity.* Serya XI (1838 r.), art. 1224—1226, 1297 i inne. W tłumaczeniu niemieckiem „Researches“ Faradaya (a dotychczas przynajmniej serye I—XXIII) wydano w „Ostwald's Klassiker der exakten Wissenchaften“, №№ 81, 86, 87, 126, 128, 131, 134, 136, 140. (Całe dzieło Faradaya składa się z 30-tu seryj.)

repulsion of the lines of force"). Później *(loc. cit.*, art. 3266—3268) rozciągnął też Faraday pomysły swe do pola magnetycznego i elektromagnetycznego, pozostając jednak zawsze na gruncie *jakościowym*, t. j. nie rozpatrując wielkości owych ciśnień i napięć*).

Wielki jego następca *J. Clerk Maxwell* podjął zagadnienie to ze strony *ilościowej* i dotarł do rozwiązania jego, wyrażając je — jak zresztą niemal wszystkie inne myśli Faradaya — w ścisłym języku matematycznym**). Okazał on mianowicie, że wszelkie działania mechaniczne pola elektromagnetycznego dają się wyprowadzić z pewnego układu ciśnień i napięć, które wyraził ilościowo dla każdego punktu pola w zależności od panujących tamże wektorów elektrycznych **E**, **D**, względnie magnetycznych **M**, **B**. Układ ten napięć i ciśnień nazwiemy *wysiłem* elektromagnetycznym *(elmgn. stress)*.

Zanim jednak zwrócimy się do tego wysiłu szczególnego i zanim okażemy, iż wynikają zeń istotnie działania ponderomotoryczne (V^a) i (V^b), t. j. siła **P** i moment pary sił **L**, rozważymy nasamprzód pewne przynajmniej własności zasadnicze dowolnego w ogóle układu ciśnień i napięć, czyli wysiłu pojętego ogólnie.

§ 51. Niechaj *wektor* $\mathbf{f}_\nu . d\sigma$ wyobraża, co do kierunku i wielkości, napięcie działające na element powierzchni $d\sigma$ o normalnej ν; napięcie na *jednostkę powierzchni*, t. j. $\mathbf{f}_\nu$ samo, będziemy krótko nazywali *napięciem*. Przez napięcie *dodatnie* będziemy rozumieli napięcie we właściwem znaczeniu słowa, a zgodnie z tem napięcie *ujemne* będzie dla nas *ciśnieniem* właściwem.

Napięcie lub ciśnienie czysto normalne, jak np. hydrostatyczne, stanowi najszczególniejszy tylko i najprostszy wypadek wysiłu; wyrazem jego byłoby: $\mathbf{f}_\nu = a.\nu$, gdzie a jest skalarem, dodatnim lub ujemnym.

W ogóle jednak kierunek napięcia $\mathbf{f}_\nu$ będzie tworzył z normalną ν pewien kąt różny od zera i od dwóch prostych; innemi słowy, napięcie to będzie posiadało pewną składową normalną $\nu\mathbf{f}_\nu$ i pewną też składową *styczną* do elementu $d\sigma$, przy dowolnej

---

*) Powszechnie zresztą wiadomo, że matematyka była obcą Faradayowi; w całem jego dziele niema też, formalnie przynajmniej, żadnych roztrząsań matematycznych.

**) *J. C. Maxwell: On physical lines of force*, Phil. Mag. 1861 — 62, przedrukowane w *Scientific Papers*, T. I; tłumaczenie niemieckie w „Ostwald's Klassiker", № 102. — *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873), T. I, Rozdz. V i T. II, Rozdz. XI, art. 641—646.

oryentacyi tego elementu, t. j. przy dowolnym kierunku normalnego doń wektora ν. Dla pewnych tylko szczególnych kierunków ν składowa styczna napięcia może znikać; wówczas będziemy mówili o napięciu *czysto normalnem* w jednym ze szczególnych takich kierunków, które zresztą przy przejściu od punktu do punktu mogą się zmieniać.

Składową (skalarną) napięcia $\mathbf{f}_\nu$ wziętą w kierunku dowolnego wektora ι, czyli rzut napięcia tego na kierunek ι będę oznaczał przez $f_{\nu\iota}$, bacząc przytem zawsze na *porządek* wskaźników; $f_{\iota\nu}$ będzie tedy składową napięcia $\mathbf{f}_\iota$ (t. j. odpowiadającego elementowi o normalnej ι) wziętą w kierunku ν. Jeżeli ι, zarówno jak ν, jest wektorem *jednostkowym*, możemy według powyższego określenia napisać:

$$f_{\nu\iota} = \iota \mathbf{f}_\nu, \tag{134}$$

podczas gdy $f_{\iota\nu}$ będzie oznaczało to samo co $\nu\mathbf{f}_\iota$.

Składowe napięcia $\mathbf{f}_\nu$ w trzech kierunkach normalnych $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ oznaczymy, dla udogodnienia pisowni (a szczególniej druku) przez $f_{\nu 1}$, $f_{\nu 2}$, $f_{\nu 3}$, podobnie jak pisaliśmy w ogóle R_1 i t. d. dla składowych dowolnego wektora $\mathbf{R}$. Będzie tedy

$$f_{\nu 1} = \mathbf{i}\mathbf{f}_\nu,\ f_{\nu 2} = \mathbf{j}\mathbf{f}_\nu,\ f_{\nu 3} = \mathbf{k}\mathbf{f}_\nu. \tag{135}$$

Napięcie na element prostopadły do $\mathbf{i}$, względnie do $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (t. j. do $\nu = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) oznaczymy przez $\mathbf{f}_1$, względnie przez $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, a więc składowe tych napięć wzięte w kierunkach $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, przez:

$$\begin{matrix} f_{11},\ f_{12},\ f_{13} \\ f_{21},\ f_{22},\ f_{23} \\ f_{31},\ f_{32},\ f_{33}. \end{matrix} \tag{136}$$

Jak zobaczymy, *dziewięć* tych wielkości skalarnych, przepisanych dla każdego punktu, określa zupełnie cały wysił; liczba ta skalarów wzajemnie niezależnych, *wystarczająca*, jest też *niezbędną* dla zupełnego określenia najogólniejszego wysiłu.

Z dziewięciu tych skalarów trzy, zaopatrzone we wskaźniki jednakowe, wyrażają składowe normalne, sześć pozostałych zaś, o wskaźnikach różnych,—składowe styczne napięć.

Dla krótkości będziemy nazywali cały wysił, czyli układ napięć lub ciśnień, *wysiłem f*, zaś dziewięć skalarów f_{11}, f_{12} i t. d. jego *składowemi*. Symbol ten f nie oznacza oczywiście ani skalara ani wektora, lecz jest określony raczej przez trzy różne wektory, chociażby przez $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$.

Wysił nazywa się *irotacyjnym* *, jeżeli jego składowe czynią zadość warunkom

$$f_{12} = f_{21},\ f_{23} = f_{32},\ f_{31} = f_{13}. \tag{137}$$

dzięki którym liczba jego składowych redukuje się do sześciu. W zwykłej „Teoryi sprężystości“ rozważa się jedynie wysił irotacyjny, tu jednak musimy rzecz ogólniej traktować, gdyż—jak zobaczymy niebawem—wysił Maxwellowski w środowiskach krystalicznych jest rotacyjny.

Powiadamy, że wysił g (o składowych g_{11}, g_{12} i t. d.) jest *sprzężony* względem wysiłu f, i odwrotnie, jeżeli składowe ich czynią zadość warunkom

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= f_{11},\ g_{22} = f_{22},\ g_{33} = f_{33} \\ g_{21} &= f_{12},\ g_{12} = f_{21},\ \text{i t. d.,} \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

t. j. jeżeli obadwa posiadają odpowiednio te same składowe normalne, a składowe styczne jednego wynikają ze składowych stycznych drugiego przez zmianę porządku wskaźników. Jeżeli więc (136) są składowemi danego wysiłu, natenczas składowe wysiłu sprzężonego będą

$$\begin{matrix} f_{11},\ f_{21},\ f_{31} \\ f_{12},\ f_{22},\ f_{32} \\ f_{13},\ f_{23},\ f_{33}. \end{matrix} \tag{136'}$$

(Porówn. *Wstęp*, o operatorach sprzężonych).

Wysił sprzężony względem f będę w dalszym ciągu *stale* oznaczał przez g, nie nadmieniając tego nawet wyraźnie.

Wszelki wysił *irotacyjny* jest oczywiście *samosprzężonym*, t. j.: jeżeli f jest wysiłem irotacyjnym, mamy $g = f$.

§ 52. Powiedziałem przed chwilą, że najogólniejszy wysił jest zupełnie określony przez dziewięć niezależnych od siebie skalarów, chociażby przez 9 składowych f_{11}, f_{12}, ... f_{33}. Jest to, przedewszystkiem, równoważne twierdzeniu, że *trzy wektory* $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{i} f_{11} + \mathbf{j} f_{12} + \mathbf{k} f_{13},\ \text{i t. d.} \tag{139}$$

określają wysił w najogólniejszym wypadku.

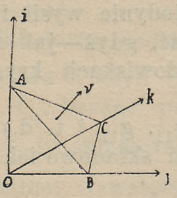
Uprzytomnijmy sobie nasamprzód treść tego twierdzenia. Ma ono, oczywiście, wyrażać to, że znając napięcia $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ dla elementu powierzchni prostopadłego bądź to do $\mathbf{i}$, bądź do $\mathbf{j}$, bądź też

---

*) Wybór tej nazwy zrozumiemy w dalszym ciągu.

do **k**, czyli dla $\nu = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, możemy określić za pomocą nich napięcie $\mathbf{f}_\nu$ dla wszelkiej innej oryentacyi elementu, t. j. dla wszelkich możliwych kierunków normalnej ν.

Otóż, aby tego dowieść, pomyślmy sobie element objętości w postaci czworościanu $OABCA$ (Fig. 38), którego krawędzie biegną wzdłuż **i**, **j**, **k** i posiadają długości $OA = dx$, $OB = dy$, $OC = dz$, uważane jako nieskończenie małe pierwszego rzędu. Objętość tej bryły elementarnej będzie nieskończenie małą trzeciego rzędu. Normalną *zewnętrzną* do ściany ABC oznaczmy przez ν; pole ABC, nieskończenie małe drugiego rzędu, niechaj będzie $d\sigma$. Jeżeli l, m, n oznaczają dostawy kierunkowe normalnej ν, t. j. jeżeli $\nu = \mathbf{i}l + \mathbf{j}m + \mathbf{k}n$, pola trójkątów OBC, OCA, OAB będą $l.d\sigma$, $m.d\sigma$, $n.d\sigma$, napięcia więc całkowite, jakich doznają ściany ABC, OBC i t. d, będą odpowiednio



(Fig. 38).

$$\mathbf{f}_\nu d\sigma,\ \mathbf{f}_1 . l d\sigma,\ \mathbf{f}_2 . m d\sigma,\ \mathbf{f}_3 . n d\sigma,$$

a więc suma algebraiczna składowych wszystkich tych napięć wziętych w kierunku **i**, czyli składowa S_1 siły mechanicznej działającej na czworościan, wzięta w tymże kierunku, będzie:

$$(140) \qquad S_1 = (\mathrm{f}_{\nu 1} - \mathrm{f}_{11} l - \mathrm{f}_{21} m - \mathrm{f}_{31} n)\, d\sigma.$$

Siła ta ma być rowna masie czworościanu pomnożonej przez jego przyspieszenie w kierunku **i**; otóż, jeżeli założymy, że gęstość masy jest skończona, masa naszego czworościanu będzie nieskończenie małą III-go rzędu; jeżeli więc wymagamy, aby przyspieszenie nie było nieskończenie wielkie, S_1 będzie również wielkością III-go rzędu przynajmniej; ponieważ zaś $d\sigma$ jest II-go rzędu, zaś $\mathrm{f}_{\nu 1}$ i t. d. mają być skończone, przeto według (140) będzie, z pominięciem wielkości nieskończenie małych: $\mathrm{f}_{\nu 1} - l\mathrm{f}_{11} - m\mathrm{f}_{21} - n\mathrm{f}_{31} = 0$. Podobne dwa równania wynikną z rozważania sił S_2, S_3, działających na czworościan w kierunkach **j**, **k**; otrzymamy tedy:

$$(141) \qquad \begin{cases} \mathrm{f}_{\nu 1} = l\mathrm{f}_{11} + m\mathrm{f}_{21} + n\mathrm{f}_{31} \\ \mathrm{f}_{\nu 2} = l\mathrm{f}_{12} + m\mathrm{f}_{22} + n\mathrm{f}_{32} \\ \mathrm{f}_{\nu 3} = l\mathrm{f}_{13} + m\mathrm{f}_{23} + n\mathrm{f}_{33}, \end{cases}$$

tak iż napięcie wypadkowe $\mathbf{f}_\nu$ dla dowolnego kierunku ν t. j. dla dowolnej oryentacyi elementu $d\sigma$ będzie zupełnie określone przez dziewięć skalarów f_{11}, f_{12} i t. d., czyli przez trzy wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$.

Jeżeli ktoś nie chce wdawać się w rozważanie mas i przyspieszeń, może powiedzieć poprostu, iż związki (141) wynikają z wyraźnego założenia, że działanie wypadkowe wysiłu na element objętości wyraża się przez wielkość *tegoż rzędu* co sama ta objętość,—dodając zresztą, że zachodzi to tam tylko, gdzie napięcia i ciśnienia są przestrzenie ciągłe; o powierzchniach nieciągłości później będzie mowa.

Zauważmy, że po prawej stronie (141) mamy składowe wysiłu g sprzężonego względem f [porówn. (136′)]; możemy tedy napisać $f_{\nu 1} = lg_{11} + mg_{12} + ng_{13}$, i t. d., czyli krócej:

$$f_{\nu 1} = \nu g_1,\ f_{\nu 2} = \nu g_2,\ f_{\nu 3} = \nu g_3; \qquad (142a)$$

ponieważ zaś $f_{\nu 1}$, $f_{\nu 2}$, $f_{\nu 3}$ są składowemi wektora $\mathbf{f}_\nu$ wzdłuż $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, możemy trzy te równania ściągnąć w jedno, a mianowicie:

$$\mathbf{f}_\nu = \mathbf{i}(\nu g_1) + \mathbf{j}(\nu g_2) + \mathbf{k}(\nu g_3) = \mathbf{i} g_{1\nu} + \mathbf{j} g_{2\nu} + \mathbf{k} g_{3\nu}. \qquad (142)$$

Równanie to zachodzi dla *dowolnego* wysiłu.

Dla wysiłu *irotacyjnego* mamy $g = f$, a więc prostszy nieco związek $\mathbf{f}_\nu = \mathbf{i}(\nu f_1) + \mathbf{j}(\nu f_2) + \mathbf{k}(\nu f_3) = \mathbf{i} f_{1\nu} + \mathbf{j} f_{2\nu} + \mathbf{k} f_{3\nu}$.

§ 53. *Osiami głównemi wysiłu* (w danym punkcie) nazywają się te szczególne kierunki normalnej ν, przy wyborze których napięcie dla odpowiedniego elementu $d\sigma$ staje się *czysto normalnem*.

Dla odróżnienia od wszelkich innych oznaczmy kierunek taki przez wektor jednostkowy λ. Wówczas, według określenia, będzie:

$$\mathbf{f}_\lambda = N.\lambda = N.[\mathbf{i}\lambda.\mathbf{i} + \mathbf{j}\lambda.\mathbf{j} + \mathbf{k}\lambda.\mathbf{k}] \qquad (143)$$

gdzie N jest *skalarem*. Według (142) mamy

$$\mathbf{f}_\lambda = \mathbf{i}(\lambda g_1) + \mathbf{j}(\lambda g_2) + \mathbf{k}(\lambda g_3), \qquad (144)$$

a więc, odejmując równanie to od poprzedniego:

$$(\lambda g_1 - N.\mathbf{i}\lambda)\,\mathbf{i} + (\lambda g_2 - N.\mathbf{j}\lambda)\,\mathbf{j} + (\lambda g_3 - N.\mathbf{k}\lambda)\,\mathbf{k} = 0,$$

czyli

$$(g_1 - N\mathbf{i})\,\lambda = (g_2 - N\mathbf{j})\,\lambda = (g_3 - N\mathbf{k})\,\lambda = 0;$$

oś główna wysiłu (λ) musi tedy być normalną do trzech wektorów $g_1 - N\mathbf{i}$, i t. d., skalar N przeto musi czynić zadość warunkowi: * $(g_1 - N\mathbf{i})\ \mathrm{V}(g_2 - N\mathbf{j})\ (g_3 - N\mathbf{k}) = 0$, czyli:

---

* Porówn. podobne zupełnie rozumowanie, dotyczące operatorów liniowych, *Wstęp*, str. 17 i następne. Możemy przepisać teraz poprostu otrzymane tam wzory, podstawiając jedynie g zamiast ω (i N zamiast n) i uwzględniając, że $g_{11} = f_{11}$, i t. d. $g_{12} = f_{21}$, $g_{21} = f_{12}$, i t. d.

$$(145) \qquad \begin{vmatrix} f_{11}-N, & f_{21}, & f_{31} \\ f_{12}, & f_{22}-N, & f_{32} \\ f_{13}, & f_{23}, & f_{33}-N \end{vmatrix} = 0,$$

t. j. równaniu *trzeciego* stopnia. W ogóle będą tedy istniały trzy różne pierwiastki, powiedzmy N_1, N_2, N_3, a więc też, o ile są one rzeczywiste, trzy osie główne wysiłu λ_1, λ_2, λ_3. Wielkości te N_1, N_2, N_3, o ile są rzeczywiste, nazywają się *napięciami głównemi* (lub *ciśnieniami głównemi*) rozważanego wysiłu.

Skoro f_{11}, f_{12} i t. d. są rzeczywiste, *jeden* z pierwiastków, niechaj nim będzie N_1, jest z pewnością rzeczywisty, podczas gdy dwa inne mogą w ogóle być sprzężone. Biorąc **i** w kierunku osi λ_1, mamy (jak we *Wstępie*, str. 19.):

$$f_{11} = N_1, \quad f_{12} = f_{13} = 0,$$

tak iż ze (145) otrzymamy dla pozostałych dwóch pierwiastków N_2, N_3:

$$\begin{vmatrix} f_{22}-N, & f_{32} \\ f_{23}, & f_{33}-N \end{vmatrix} = 0,$$

t. j.

$$(146) \qquad N = \tfrac{1}{2}\left[f_{22} + f_{33} \pm \sqrt{(f_{22} - f_{33})^2 + 4f_{23}.f_{32}}\right].$$

Jeżeli więc

$$(147) \qquad (f_{22} - f_{33})^2 + 4f_{23}.f_{32} > 0,$$

wszystkie trzy pierwiastki są rzeczywiste i w ogóle różne od siebie, t. j. istnieją trzy różne napięcia główne, odpowiadające trzem osiom głównym w ogóle skośnokątnym. W szczególnym wypadku

$$(147') \qquad (f_{22} - f_{33})^2 + 4f_{23}.f_{32} = 0$$

mamy $N_2 = N_3 = \frac{1}{2}(f_{22} + f_{33})$.

Dla wysiłu *irotacyjnego*, t. j. dla $f_{23} = f_{32}$, warunek (147) jest zawsze spełniony, tak iż wszystkie trzy osie główne są przeczywiste i (porówn. *Wstęp*, str. 20—21) wzajemnie *prostopadłe*; kładąc wzdłuż nich wektory **i**, **j**, **k**, mamy

$$(148a) \qquad \begin{cases} f_{11} = N_1, & f_{22} = N_2, & f_{33} = N_3 \\ f_{12} = f_{23} = f_{31} = 0, \end{cases}$$

czyli wektorowo:

$$(148) \qquad \mathbf{f}_1 = N_1.\mathbf{i}, \quad \mathbf{f}_2 = N_2.\mathbf{j}, \quad \mathbf{f}_3 = N_3.\mathbf{k},$$

a więc dla dowolnego elementu powierzchni, którego normalna ν posiada *względem osi głównych* wysiłu dostawy kierunkowe l, m, n, według (142):

$$\mathbf{f}_\nu = \mathbf{i}(lN_1) + \mathbf{j}(mN_2) + \mathbf{k}(nN_3). \qquad (149)$$

Jeżeli więc napięcia główne N_1, N_2, N_3 są *różne* od siebie, napięcie $\mathbf{f}_\nu$ jest w ogóle ukośne, a staje się czysto normalnem *wyłącznie tylko* dla $\nu = \pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$, $\pm\mathbf{k}$. O takim wysile irotacyjnym powiemy krótko, że posiada *trzy osie*. Jest to najogólniejszy wypadek wysiłu irotacyjnego. Podobnie jak dla operatora liniowego ω (str. 21) możemy zbudować odpowiedni elipsoid, który będzie trójosiowym.

Jeżeli dwa napięcia główne są równe, np. $N_2 = N_3$, elipsoid ten staje się obrotowym, a osią jego będzie $\pm\mathbf{i}$. Oś ta będzie *osią symetryi* wysiłu. Dla wszystkich bowiem kierunków ν prostopadłych do niej będziemy mieli napięcia czysto normalne i jednakowe co do wielkości, a mianowicie równe N_2. Innemi słowy: napięcia czysto normalnego doznawać będzie element $d\sigma$ prostopadły do tej osi i oprócz tego wszystkie elementy $d\sigma$ zawierające tę oś, niezależnie od ich oryentacyi; wszelkie inne elementy będą natomiast doznawały napięcia ukośnego. Mając na myśli zamiast elementów $d\sigma$ odpowiednie ν, możemy też powiedzieć, że napięcia są czysto normalne w kierunku *osiowym* i we wszelkich kierunkach *poprzecznych*, czyli *„równikowych“*, zaś ukośne we wszystkich innych kierunkach. O ile wielkość napięcia osiowego N_1 jest istotnie *różna* od wielkości napięcia równikowego N_2, powiadamy, że wysił taki posiada *jednę oś* ($\pm\mathbf{i}$).

Takim właśnie wysiłem symetrycznym czyli jednoosiowym będzie Maxwellowski wysił elektromagnetyczny w środowisku izotropowem. (W środowiskach krystalicznych wysił ten nie jest już irotacyjnym.)

Jeżeli wreszcie $N_3 = N_2 = N_1 = N$, tak iż odpowiedni elipsoid staje się kulą, mamy napięcia czysto normalne i jednakowe dla wszelkich w ogóle kierunków, t. j. $\mathbf{f}_\nu = N\nu$. Wysił taki, znany najlepiej z hydrostatyki, możemy nazwać izotropowym lub hydrostatycznym. Dla określenia go wystarcza jedyna wielkość skalarna N.

Jeżeli N jest dodatnie, mówimy o *napięciu* właściwem, jeżeli zaś jest ujemne, mówimy o *ciśnieniu* właściwem; podobnie też w wypadkach ogólniejszych: jeżeli np. dla wysiłu symetrycznego jest $N_1 > 0$, zaś $N_2 < 0$, będziemy mieli w kierunku osiowym napięcie, we wszystkich zaś poprzecznych ciśnienie właściwe.

Wielkości napięć głównych i kierunki osi głównych, t.j. w ogóle własności wysiłu, mogą się oczywiście zmieniać od punktu do punktu. Tak np. w wypadku wysiłu symetrycznego zbiór osi może

tworzyć dowolną linię krzywą, a wzdłuż tej linii wartości napięć głównych mogą się zmieniać.

Zauważmy wreszcie, że przez dodanie dowolnego wysiłu hydrostatycznego charakter pierwotnego wysiłu nie doznaje żadnej zmiany, t. j. kierunki osi i różnice wartości napięć głównych zostają zachowane.

§ 54. Powyżej wymagaliśmy, aby siła wypadkowa, działająca na element objętości $d\tau$, a wynikająca z wysiłu f, była wielkością tegoż rzędu (przynajmniej) co $d\tau$, i z tego też założenia wyprowadziliśmy związki (141) czyli (142). Niechaj siła ta będzie $\mathbf{P}d\tau$, czyli $\mathbf{P}$ na jednostkę objętości. Oprócz tej siły, starającej się wprawić element w ruch postępowy, będziemy mieli w ogóle pewną jeszcze parę sił, dążącą do wprawienia go w ruch obrotowy, której moment niechaj będzie $\mathbf{L}d\tau$, czyli $\mathbf{L}$ na jednostkę objętości.

Obliczmy nasamprzód $\mathbf{P} = \mathbf{i}P_1 + \mathbf{j}P_2 + \mathbf{k}P_3$. Rozważając dowolną bryłę τ, wyciętą myślowo ze środowiska poddanego wysiłowi f, a ograniczoną przez powierzchnię σ o normalnej *zewnętrznej* ν, otrzymamy dla pierwszej składowej całej siły działającej na tę bryłę

$$\int P_1 d\tau = \int f_{\nu 1}.d\sigma.$$

Aby całkę powierzchniową, po prawej stronie, przekształcić na przestrzenną, skorzystamy ze wzorów (142a); pierwszy z nich da nam mianowicie $\int f_{\nu 1} d\sigma = \int \nu \mathbf{g}_1 . d\sigma = \int div\, \mathbf{g}_1 . d\tau$ *, a więc:

$$\int P_1 d\tau = \int div\, \mathbf{g}_1 . d\tau.$$

Ponieważ zaś równanie to zachodzi dla dowolnej bryły, a więc też dla każdego elementu $d\tau$, przeto mamy $P_1 = div\, \mathbf{g}_1$ i podobnie dla kierunków $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$: $P_2 = div\, \mathbf{g}_2$, $P_3 = div\, \mathbf{g}_3$, czyli w jednym wzorze wektorowym:

$$\mathbf{P} = \mathbf{i}.div\, \mathbf{g}_1 + \mathbf{j}.div\, \mathbf{g}_2 + \mathbf{k}.div\, \mathbf{g}_3. \tag{150}$$

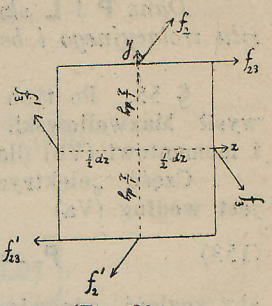
Rozważając napięcia styczne do ścian prostopadłościanu elementarnego $d\tau = dx.dy.dz$, otrzymamy dla pierwszej składowej momentu pary sił, działającej na ten element, z pominięciem wielkości *czwartego* rzędu:

---

* W założeniu, że wysił f, a więc też i wysił sprzężony g, są ciągłe w dziedzinie τ.

$$L_1.d\tau = \tfrac{1}{2}\, dy\,(f_{23} - f'_{23})\, dz\, dx - \tfrac{1}{2}\, dz.(f_{32} - f'_{32})dx\, dy;$$

wielkości f bez akcentów dotyczą ścian, którym odpowiadają *większe* wartości y, względnie z, wielkości zaś z akcentami przysługują ścianom przeciwległym (Fig. 39), tak iż możemy napisać:



(Fig. 39).

$$f'_{23} = -(f_{23} - \frac{\partial f_{23}}{\partial y}\, dy),\ f'_{32} = -(f_{32} - \frac{\partial f_{32}}{\partial z}\, dz),$$

a więc, z pominięciem wyrazów zawierających dy, dz, które po wprowadzeniu do $L_1.d\tau$ dałyby wyrazy *czwartego* rzędu:

$$f'_{23} = -f_{23},\quad f'_{32} = -f_{32}.$$

Wprowadzając to do powyższego wzoru i dzieląc obustronnie przez $dx.dy.dz = d\tau$, otrzymamy $L_1 = f_{23} - f_{32}$, stąd zaś, przez zamianę cykliczną wskaźników 1, 2, 3, dwie pozostałe składowe momentu, t. j. ostatecznie:

$$\mathbf{L} = \mathbf{i}\,(f_{23} - f_{32}) + \mathbf{j}\,(f_{31} - f_{13}) + \mathbf{k}\,(f_{12} - f_{21}). \qquad (151)$$

(Dla $f_{23} = f_{32}$, i t. d. moment ten znika; stąd też nazwa wysiłu irotacyjnego.)

Wzory (150) i (151) wyrażają całe działanie wypadkowe najogólniejszego wysiłu na dowolny element objętości. Jeżeli przepisany jest wysił f, a więc też i g, możemy obliczyć z nich jednoznacznie siłę **P** i moment **L**, co do wielkości i kierunku. Odwrotnie jednak, jeżeli *dane są* **P** *i* **L**, wysił f nie jest zupełnie określony; jeżeli bowiem pewien wysił f czyni zadość równaniom (150) i (151) przy danych **P**, **L**, możemy bez żadnej zmiany tych równań dodać doń wysił h *irotacyjny* i *„bezsilny“* *), t. j. czyniący zadość warunkom

$$h_{23} = h_{32},\ h_{31} = h_{13},\ h_{12} = h_{21};\ div\,\mathbf{h}_1 = div\,\mathbf{h}_2 = div\,\mathbf{h}_3 = 0, \qquad (152)$$

lecz zresztą dowolny (byle tylko ciągły). Zauważmy, że, ze względu na irotacyjność h, wysił ten dodatkowy jest samosprzężonym, tak iż pisząc $f + h$ zamiast f, mamy też jednocześnie, zamiast g:

*) T. j. taki, który sam nie dałby żadnego momentu obrotowego **L** ani też żadnej siły **P**. Przez „wysił bezsilny“, chciałem spolszczyć termin angielski „*forceless* stress“.

$g + h$, t. j. zamiast $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$: $\mathbf{g}_1 + \mathbf{h}_1$ i t. d., dzięki czemu równanie (150) pozostaje bezpośrednio spełnione.

Krócej możemy powiedzieć:

Dane $\mathbf{P}$ i $\mathbf{L}$ *określają wysił z pominięciem dodatkowego wysiłu irotacyjnego i bezsilnego.*

§ 55. Po tych objaśnieniach ogólnych możemy łatwo znaleść wysił Maxwellowski, odpowiadający sile ponderomotorycznej (Va) i momentowi (Vb) dla dowolnego pola elektromagnetycznego.

Część „elektryczna“ siły $\mathbf{P}$, t. j. część zależna od $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, K, jest według (Va)

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{E}\rho - \tfrac{1}{2}\nabla_k(\mathbf{ED}) - \mathrm{V}\mathbf{D}\,curl\,\mathbf{E}; \tag{153}$$

aby znaleść odpowiedni wysił f, należy wyrazić ją, według (150), przez wysił sprzężony g, a więc przedstawić składowe jej P_{e_1}, P_{e_2}, P_{e_3} w postaci

$$P_{e_1} = \mathrm{div}\,\mathbf{g}_1 \tag{154}$$

i t. d., aby następnie przejść od g do f.

Otóż, według (153), możemy napisać

$$P_{e_1} = E_1\rho - \tfrac{1}{2}\mathbf{E}.\frac{\partial K}{\partial x}\,\mathbf{E} - D_2\left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right) + D_3\left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}\right),$$

czyli, dodając i odejmując $D_1\frac{\partial E_1}{\partial x}$:

$$P_{e_1} = E_1\rho - \tfrac{1}{2}\mathbf{E}.\frac{\partial K}{\partial x}\,\mathbf{E} - \left(D_1\frac{\partial E_1}{\partial x} + D_2\frac{\partial E_2}{\partial x} + D_3\frac{\partial E_3}{\partial x}\right)$$

$$+ \left(D_1\frac{\partial}{\partial x} + D_2\frac{\partial}{\partial y} + D_3\frac{\partial}{\partial z}\right)E_1$$

$$= E_1\rho - \tfrac{1}{2}\mathbf{E}.\frac{\partial K}{\partial x}\,\mathbf{E} - \mathbf{D}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + (\mathbf{D}\nabla)E_1;$$

lecz $\quad \tfrac{1}{2}\mathbf{E}.\frac{\partial K}{\partial x}\,\mathbf{E} + \mathbf{D}.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\mathbf{E}.\frac{\partial K}{\partial x}\,\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}.K\mathbf{E}$

---

* Jest to iloczyn skalarny wektora $\frac{1}{2}\mathbf{E}$ i wektora $\frac{\partial K}{\partial x}\mathbf{E}$, t. j. wektora, który otrzymuje się z $\mathbf{E}$ przez zastosowanie operatora wektorowego liniowego $\frac{\partial K}{\partial x}$ o „składowych“ $\frac{\partial K_{11}}{\partial x}$, $\frac{\partial K_{12}}{\partial x}$ i t. d.

$$= \tfrac{1}{2}\mathbf{E}.\frac{\partial K}{\partial x}\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}.K\mathbf{E} + \mathbf{E}.K\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}\right) = *$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{E}.K\mathbf{E}) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ED}),$$

a więc, przez wprowadzenie $\rho = div\,\mathbf{D}$:

$$P_{e1} = E_1\,div\,\mathbf{D} + (\mathbf{D}\nabla)E_1 - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ED}),$$

czyli nareszcie:

$$P_{e1} = \operatorname{div}\mathbf{g}_1 = div\left[E_1\mathbf{D} - \tfrac{1}{2}\mathbf{i}(\mathbf{ED})\right].$$

Z pominięciem przeto wektora solenoidalnego ($\mathbf{h}_1$) mamy

$$\mathbf{g}_1 = E_1\mathbf{D} - \tfrac{1}{2}\mathbf{i}(\mathbf{ED}), \text{ i podobnie:}$$
$$\mathbf{g}_2 = E_2\mathbf{D} - \tfrac{1}{2}\mathbf{j}(\mathbf{ED}),$$
$$\mathbf{g}_3 = E_3\mathbf{D} - \tfrac{1}{2}\mathbf{k}(\mathbf{ED}),$$

tak iż wysił pochodzenia *elektrycznego* będzie, według (142):

$$\mathbf{f}_\nu = (\mathbf{i}E_1 + \mathbf{j}E_2 + \mathbf{k}E_3)(\mathbf{D}\nu) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{i}.i\nu + \mathbf{j}.j\nu + \mathbf{k}.k\nu)(\mathbf{ED}),$$

t. j. przy powrocie do wektorów wypadkowych:

$$\mathbf{f}_\nu = \mathbf{E}(\mathbf{D}\nu) - \tfrac{1}{2}\nu(\mathbf{ED}). \qquad \text{(VIIe)}$$

Podobnie też, rozważając część magnetyczną $\mathbf{P}_m$ siły ponderomotorycznej (Va), zupełnie analogiczną do $\mathbf{P}_e$, otrzymalibyśmy wysił pochodzenia *magnetycznego*, który atoli możemy napisać wprost, podstawiając w ostatnim wzorze zamiast **E**, **D**, wektory **M**, **B**; wysił ten będzie więc:

$$\mathbf{f}_\nu = \mathbf{M}(\mathbf{B}\nu) - \tfrac{1}{2}\nu(\mathbf{MB}). \qquad \text{(VIIm)}$$

Ze (150) i (151) widzimy bezpośrednio, że wysiłom, ze względu na ich działania ponderomotoryczne, przysługuje w całej pełni własność *superpozycyi*. Biorąc tedy sumę (VIIe) i (VIIm), otrzymamy wysił, z którego wynikać będzie *cała* siła ponderomotoryczna **P** (Va); innemi słowy: *cały wysił elektromagnetyczny*, dla dowolnego środowiska, będzie

$$\mathbf{f}_\nu = \mathbf{E}(\mathbf{D}\nu) + \mathbf{M}(\mathbf{B}\nu) - \nu.u, \qquad \text{(VII)}$$

---

* Według (128).

gdzie $u = \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{MB})$ jest skalarem, wyrażającym, jak wiemy, gęstość energii elektromagnetycznej.

Do $\mathbf{f}_\nu$ możemy dodać dowolny wysił $\mathbf{h}_\nu$, byle tylko ciągły, irotacyjny i „bezsilny", t. j. czyniący zadość warunkom (152); nie będzie to miało żadnego zgoła wpływu ani na siłę **P** ani też na moment **L**.

Bez wszelkich wysiłów dodatkowych mamy we wzorze (VII) wysił, który z pominięciem strony czysto formalnej, jest identyczny z wysiłem podanym przez Maxwella; dla tego też nazwiemy go tu i owdzie *wysiłem Maxwellowskim*.

Przy wyprowadzeniu go mieliśmy na względzie samą tylko siłę **P**; możemy się atoli łatwo przekonać, że i moment **L** (Vb) wynika zeń bezpośrednio. Istotnie, według (VII) mamy $\mathbf{f}_2 = \mathbf{E}D_2 + \mathbf{M}B_2 - \frac{1}{2}\mathbf{j}u$, a więc $f_{23} = D_2E_3 + B_2M_3$ i podobnie $f_{32} = D_3E_2 + B_3M_2$, a więc, według (151):

$$\mathbf{L} = \mathbf{i}(D_2E_3 - D_3E_2) + \ldots + \mathbf{i}(B_2M_3 - B_3M_2) + \ldots,$$

t. j. $\mathbf{L} = V\mathbf{DE} + V\mathbf{MB}$, *q. e. d.*

§ 56. Przypatrzmy się teraz wzorowi (VII) nieco bliżej. Wyrażony przezeń wysił elektromagnetyczny składa się przedewszystkiem z *ciśnienia* czysto normalnego, jednakowego dla wszelkich kierunków normalnej ν, t. j. z *ciśnienia hydrostatycznego*, które (na jednostkę powierzchni) równa się liczebnie *gęstości energii elektromagnetycznej* u w danem miejscu pola. * Oprócz tego jednak wysił składa się jeszcze z dwóch innych części, z których pierwsza $\mathbf{E}(\mathbf{D}\nu)$ posiada $\pm$ kierunek *siły elektrycznej*, druga $\mathbf{M}(\mathbf{B}\nu)$—*siły magnetycznej*; o ile więc wektory **E**, **M**, ν nie zlewają się przypadkiem, napięcia te nie będą normalne, tak iż cały wysił $\mathbf{f}_\nu$ będzie wogóle tworzył z normalną ν elementu powierzchni kąt różny od zera i od dwóch prostych.

Co się tyczy *osi głównych* tego wysiłu w najogólniejszym wypadku, t. j. dla środowiska krystalicznego, to będą one przy dowolnych kierunkach **E**, **M** *skośnokątne*. Jedna z tych osi będzie z pewnością rzeczywista (§ 53), i tę możemy znaleść natychmiast. Istotnie, obierając element powierzchni w płaszczyźnie **D**, **B**, t. j. normalną ν prostopadłą do **D**, **B**, mamy $\mathbf{D}\nu = 0$, $\mathbf{B}\nu = 0$, a więc

$$\mathbf{f}_\nu = -\nu.u, \text{ dla } \nu \perp \mathbf{D}, \mathbf{B}. \tag{155}$$

---

* Czytelnik sprawdzi łatwo, że *wymiary* energii podzielonej przez objętość są też same co siły podzielonej przez powierzchnię, t. j. $[u] = [f]$.

Jedna więc z osi głównych, nazwijmy ją λ_1, będzie zawsze *normalną do płaszczyzny* **D**, **B**. Odpowiednie napięcie główne będzie miało wielkość

$$N_1 = -u, \tag{156}$$

i. j. będzie *ciśnieniem* właściwem, liczebnie równem gęstości energii elektromagnetycznej. Dwie pozostałe osie główne λ_2, λ_3 (o ile istnieją) i odpowiednie napięcia N_2, N_3 zależą w sposób zawiły od kierunku sił elektrycznej i magnetycznej.

Dotyczący rachunek rozwinę tu chociażby tylko dla ilustracyi tego, co wyłożyłem w § 53.

Kładąc **j**, **k** w płaszczyźnie **D**, **B**, a więc **i** w kierunku pierwszej osi głównej, t. j. pisząc $\lambda_1 = \pm \mathbf{i}$, mamy zamiast (155): $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{i}.u$, a więc:

$$f_{11} = -u = N_1, \quad f_{12} = f_{13} = 0,$$

tak iż dla pozostałych dwóch pierwiastków N_2, N_3 będziemy mieli wzór (146), t. j.

$$N_{\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{2}\left[f_{22} + f_{33} \pm \sqrt{Q}\right], \tag{157}$$

gdzie

$$Q = (f_{22} - f_{33})^2 + 4f_{23}.f_{32}. \tag{158}$$

Według (VII) jest $\mathbf{f}_2 = \mathbf{E}D_2 + \mathbf{M}B_2 - \mathbf{j}u$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{E}D_3 + \mathbf{M}B_3 - \mathbf{k}u$, a więc:

$$\left.\begin{aligned} f_{22} &= E_2D_2 + M_2B_2 - u, \quad f_{23} = D_2E_3 + B_2M_3 \\ f_{33} &= E_3D_3 + M_3B_3 - u, \quad f_{32} = D_3E_2 + B_3M_2. \end{aligned}\right\} \tag{159}$$

Pamiętając, że wektor **i** jest prostopadły do płaszczyzny **D**, **B**, że więc dzięki temu jest $\mathbf{D}_1 = \mathbf{B}_1 = 0$, otrzymamy stąd przedewszystkiem $f_{22} + f_{33} = \mathbf{ED} + \mathbf{MB} - 2u$, t. j.

$$f_{22} + f_{33} = 0 \tag{160}$$

i zamiast (157):

$$N_2 = -N_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{Q}. \tag{161}$$

Podstawiając zaś (159) do (158), otrzymamy po odpowiedniem ugrupowaniu dość licznych wyrazów:

$$Q = (\mathbf{ED} + \mathbf{MB})^2 - 4(E_2M_3 - E_3M_2)\,(D_2B_3 - D_3B_2).$$

Ponieważ $\mathbf{VDB} = \mathbf{i}(D_2B_3 - D_3B_2)$ *, zaś $E_2M_3 - E_3M_2$ jest pierwszą składową wektora **VEM**, przeto $(E_2M_3 - E_3M_2)(D_2B_3 - D_3B_2)$ jest iloczynem skalarnym wektorów **VEM** i **VDB**, tak iż powyższy wzór dla Q możemy napisać:

$$Q = (\mathbf{ED} + \mathbf{MB})^2 - 4(\mathbf{VEM})(\mathbf{VDB}),$$

czyli

$$Q = 4u^2 - 4(\mathbf{VEM})(\mathbf{VDB}).$$

Według (161) i (156) mamy więc, nareszcze, dla napięć głównych N_1, N_2, N_3 w najogólniejszym wypadku, t. j. dla dowolnego pola *elektromagnetycznego* w środowisku *krystalicznem:*

$$(162)\qquad \begin{cases} N_1 = -u, \\ N_2 = \sqrt{u^2 - (\mathbf{VEM})(\mathbf{VDB})}, \\ N_3 = -N_2. \end{cases}$$

Jeżeli u^2 nie jest mniejsze od (**VEM**) (**VDB**), wszystkie te trzy wartości, a więc też i odpowiednie osie główne wysiłu są rzeczywiste. Rozwinięcie wzorów dla osi tych (λ_1, λ_2, λ_3) pozostawiam czytelnikowi.

Godną uwagi jest ta okoliczność, że w najogólniejszym nawet wypadku jest $N_2 = -N_3$, t. j. że jeżeli drugie napięcie główne jest *napięciem* właściwem, trzecie jest *ciśnieniem* właściwem liczebnie równem i odwrotnie. Dla pierwszej osi, t. j. prostopadłej do **D**, **B**, mamy zawsze *ciśnienie* właściwe, liczebnie równe u.

§ 57. *Dla środowiska izotropowego* mamy $D_3E_2 = D_2E_3$, $B_3M_2 = B_2M_3$, i t. d., a więc $f_{23} = f_{32}$, i t. d., tak iż wysił Maxwellowski staje się irotacyjnym. Dzięki temu mamy

$$(163)\qquad Q = (f_{22} - f_{33})^2 + 4f_{23}^2 = [K(E_2^2 - E_3^2) + \mu(M_2^2 - M_3^2)]^2 + 4[KE_2E_3 + \mu M_2M_3]^2,$$

tak iż wszystkie trzy wartości N i odpowiednie osie główne są rzeczywiste. Wiemy też, że są one do siebie prostopadłe.

Korzystając ze (163), moglibyśmy przeprowadzić powyższy rachunek w postaci uproszczonej nieco. Skoro już jednak posiadamy wzory ogólne (162), zastosujmy je do srodowiska izotropowego.

---

* Albowiem **VDB** nie posiada żadnych składowych w kierunkach **j**, **k**.

Dla środowiska takiego jest $V\mathbf{DB} = K\mu . V\mathbf{EM}$; wprowadzając tedy prąd energii elektromagnetycznej $\mathbf{F} = cV\mathbf{EM}$ i pisząc, jak zwykle, $K\mu . c^{-2} = v^{-2}$, otrzymamy według (162):

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= -u \\ N_2 &= -N_3 = \sqrt{u^2 - \frac{1}{v^2} F^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (164)$$

Czytelnik sprawdzi też łatwo, że wielkość, stojąca pod znakiem pierwiastkowania, jest identycznie równa prawej stronie (163) podzielonej przez 4 *, a więc istotnie dodatnia, t. j.

$$u \geqq \frac{1}{v} F. \qquad (165)$$

Oś główna λ_1, która w ogóle była prostopadła do **D**, **B**, staje się teraz prostopadłą do płaszczyzny **E**, **M**, t. j. zlewa się z $\pm$ kierunkiem prądu energii. Innemi słowy: *wzdłuż linii prądu energii mamy ciśnienie czysto normalne równe gęstości energii.*

Osi λ_2 odpowiada *napięcie* czysto normalne N_2, (164), osi λ_3 liczebnie równe *ciśnienie* normalne. Co do kierunków tych osi głównych, wiemy już, że ze względu na irotacyjność wysiłu są one prostopadłe do osi $\lambda_1 = \pm \mathbf{i}$, że więc leżą w płaszczyźnie **E**, **M**, czyli w płaszczyźnie **j**, **k**. **

Obierzmy więc przedewszystkiem wektor **j** w kierunku osi głównej λ_2, t. j. połóżmy

$$\lambda_2 = \pm \mathbf{j},$$

a więc:

$$\mathbf{f}_2 = N_2 \mathbf{j}.$$

Według (VII) mamy: $\mathbf{f}_2 = \mathbf{E}D_2 + \mathbf{M}B_2 - \mathbf{j}u$, a więc

$$\mathbf{E}D_2 + \mathbf{M}B_2 = \mathbf{j}(u + N_2);$$

---

*) t. j. że zachodzi identyczność:

$$(KE^2 + \mu M^2)^2 - 4K\mu(E_2M_3 - E_3M_2)^2 = [K(E_2^2 - E_3^2) + \mu(M_2^2 - M_3^2)]^2 + 4[KE_2E_3 + \mu M_2M_3]^2,$$

pamiętając, że obecnie jest $E_1 = M_1 = 0$, t. j. $E^2 = E_2^2 + E_3^2$, $M^2 = M_2^2 + M_3^2$.

**) Możemy to zresztą sprawdzić, pisząc według § 53 (porówn. też *Wstęp*, str. 20): $a\lambda_2 = V(\mathbf{f}_3 - N_2\mathbf{k})\ (\mathbf{f}_1 - N_2\mathbf{i})$, gdzie a jest *skalarem* (takim iż $\lambda_2^2 = 1$), rozwijając ten iloczyn wektorowy i postępując podobnie z osią λ_3.

mnożąc równanie to skalarnie przez **k**, otrzymamy

$$E_3D_2 + M_3B_2 = 0,$$

a więc też, ze względu na izotropię

(166) $$K.E_2E_3 + \mu.M_2M_3 = 0,$$

czyli

$$E_2D_3 + M_2B_3 = 0.$$

Otóż, według (VII) jest:

$$f_{32} = E_2D_3 + M_2B_3,$$

a więc $f_{32} = 0$; oprócz tego zaś mamy $f_{31} = 0$ (ze względu na $E_1 = M_1 = 0$); napięcie $\mathbf{f}_3$ jest więc czysto normalne, t. j. $\pm \mathbf{k}$ kędzie również osią główną wysiłu, czyli:

$$\lambda_3 = \pm \mathbf{k}, \quad \mathbf{f}_3 = N_3\mathbf{k} = -N_2\mathbf{k}.$$

Wszystkie więc trzy osie główne będą do siebie prostopadłe, jak być powinno.

Jednocześnie otrzymaliśmy tu równanie (166), wyrażające zależność osi $\lambda_2 = \pm \mathbf{j}$, $\lambda_3 = \pm \mathbf{k}$ od wektorów **E**, **M** i od spółczynników środowiska. Oznaczając przez α, β kąty (**j**, **E**), względnie (**j**, **M**), możemy równanie to napisać:

$$KE^2.\sin 2\alpha + \mu M^2.\sin 2\beta = 0,$$

czyli:

(167) $$u_e.\sin 2\alpha + u_m.\sin 2\beta = 0,$$

gdzie u_e, u_m są gęstościami energii: elektrycznej, względnie magnetycznej.

Dyskusyę tego wzoru pozostawiam czytelnikowi. Na szczególną uwagę zasługują wypadki, w których jest $\mathbf{E} \perp \mathbf{M}$, lub $u_e = u_m$, lub też jedno i drugie.

Jeżeli zresztą wektory **E** i **M** są do siebie *prostopadłe*, a więc też, w środowisku izotropowem, $\mathbf{D} \perp \mathbf{B}$, możemy osie wysiłu i napięcia główne wyczytać wprost ze wzoru (VII). Istotnie, kładąc **i**, **j**, **k** w kierunkach $\mathbf{F} = cV\mathbf{EM}$, względnie **E**, **M** i pisząc w tym wzorze kolejno $\nu = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, mamy

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{i}u, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{j}(KE^2 - u), \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{k}(\mu M^2 - u),$$

czyli:

(168) $$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{i}u, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{j}(u_e - u_m), \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{k}(u_m - u_e),$$

co czytelnik łatwo wyrazi słowami. Jeżeli gęstość energii elektrycznej równa się gęstości energii magnetycznej: $u_e = u_m$, mamy stąd $\mathbf{f}_2 = 0$, $\mathbf{f}_3 = 0$, tak iż cały wysił redukuje się do ciśnienia normalnego w kierunku prądu energii, t. j. prostopadłym do **E**, **M**, a wielkość tego ciśnienia równa się gęstości energii elektromagnetycznej. Wynik ten jest zgodny z wzorami (164); istotnie, dla $\mathbf{E} \perp \mathbf{M}$ i $u_e = u_m$ mamy $u = 2u_e = KE^2$, $F^2\mathfrak{v}^{-2} = K\mu(V\mathbf{EM})^2 = K\mu.E^2M^2 = (KE^2)^2$, t. j.

$$F = \mathfrak{v}u \tag{169}$$

a więc $N_2 = N_3 = 0$.

§ 58. Cały wysił elektromagnetyczny jest, jak widzieliśmy, dość zawiły, szczególniej w kryształach. Stosunkowo proste natomiast są składające się nań wysiły: *elektryczny* (VIIe) i *magnetyczny* (VII^m), § 55. Na zakończenie przeto i dla ułatwienia oryentacyi, rozważymy je tu jeszcze z osobna. Ponieważ zresztą wysił magnetyczny jest zupełnie podobny do elektrycznego, dość będzie zająć się tu jednym z nich.

Wprowadzając gęstość energii elektrycznej u_e, możemy napisać:

$$\mathbf{f}_\nu = \mathbf{E}(\mathbf{D}\nu) - \nu u_e, \tag{VII^e}$$

a ze wzoru tego wyczytamy już bezpośrednio osie i ciśnienia główne tego wysiłu.

a) Środowisko krystaliczne.—Biorąc ν w kierunku siły elektrycznej, a więc pisząc $\mathbf{E} = \nu E$, mamy $\mathbf{E}(\mathbf{D}\nu) = \nu.E(\mathbf{D}\nu) = \nu(\mathbf{ED}) = 2\nu u_e$, a więc:

$$\mathbf{f}_\nu = \nu u_e, \text{ dla } \nu \parallel \mathbf{E}. \tag{170}$$

Biorąc ν prostopadłe do polaryzacyi elektrycznej, lecz zresztą dowolne co do kierunku, mamy $\mathbf{D}\nu = 0$, a więc:

$$\mathbf{f}_\nu = -\nu u_e, \text{ dla } \nu \perp \mathbf{D}. \tag{171}$$

Osiami głównemi wysiłu elektrycznego w krysztale są więc: siła elektryczna i wszystkie kierunki prostopadłe do polaryzacyi elektrycznej. Wzdłuż pierwszej panuje *napięcie* u_e, w pozostałych zaś *ciśnienie* tejże wielkości. Napięcia, względnie ciśnienia główne są więc liczebnie *równe gęstości energii elektrycznej.*

Ponieważ kierunki **E**, **D**, są różne, przeto wysił ten *nie jest symetryczny*, a główne jego osie są w ogóle *skośnokątne*, chyba, że kierunek siły **E** zlewa się z jedną z osi elektrycznych kryształu, t. j. z jedną z osi głównych operatora K.

Wszystkie te własności przysługują, *mutatis mutandis*, wysiłowi czysto magnetycznemu.

b) Środowisko izotropowe.—Ponieważ kierunki siły i polaryzacyi zlewają się ze sobą, przeto osiami głównemi wysiłu elektrycznego będą: *sama siła elektryczna i wszystkie kierunki prostopadłe do tejże siły.*

Wzdłuż linii elektrycznej panuje napięcie $u_e = \frac{1}{2}KE^2$, *we wszystkich kierunkach prostopadłych — również wielkie ciśnienie.* Wysił ten jest więc *symetryczny* czyli „jednoosiowy", a osią jego symetryi jest siła elektryczna.

Możemy też powiedzieć, że linie siły elektrycznej są *liniami największego napięcia normalnego* *, czyli *najmniejszego ciśnienia normalnego.*

Analogiczne zupełnie własności przysługują wysiłowi czysto magnetycznemu. Wzdłuż linii siły magnetycznej mamy *napięcie* $u_e = \frac{1}{2}\mu M^2$, we wszystkich kierunkach prostopadłych również wielkie *ciśnienie.*

Jeżeli obadwa wysiły spółistnieją i jeżeli np. $\mathbf{E} \perp \mathbf{M}$, otrzymamy stąd natychmiast wzory (168). Wypadkowy bowiem wysił otrzymuje się, dodając do siebie poprostu odpowiednie napięcia $\mathbf{f}_\nu$, dla każdego kierunku normalnej.

---

* Zauważmy zresztą, że *tensor* wektora (VIIe), t. j. *wielkość liczebna* napięcia $\mathbf{f}_\nu$ jest *dla wszystkich możliwych kierunków normalnej* ν *jedna i ta sama*, a mianowicie równa u_e. Istotnie, podnosząc (VIIe) do kwadratu (skalarnie), mamy:

$$\mathbf{f}_\nu^2 = E^2(\mathbf{D}\nu)^2 - 2(\mathbf{E}\nu)(\mathbf{D}\nu)u_e + u_e^2 = K^2[E^2(\mathbf{E}\nu)^2 - (\mathbf{E}\nu)^2E^2] + u_e^2,$$

t. j. $f_\nu = u_e$, dla wszelkich ν. Lecz napięcia te nie są w ogóle czysto normalne. Dla *składowej normalnej* napięcia $\mathbf{f}_\nu$ przy dowolnym kierunku ν, t. j. dla skalara $f_{\nu\nu}$ mamy według (VIIe):

$$f_{\nu\nu} = \nu\mathbf{f}_\nu = (\mathbf{E}\nu)(\mathbf{D}\nu) - u_e = K(\mathbf{E}\nu)^2 - u_e,$$

t. j.

$$f_{\nu\nu} = K[(\mathbf{E}\nu)^2 - \tfrac{1}{2}E^2].$$

Otóż ta właśnie składowa normalna staje się *największą* dla $\nu \parallel \mathbf{E}$, a mianowicie równą $\frac{1}{2}KE^2 = u_e$ (i najmniejszą, a mianowicie $= -u_e$, dla $\nu \perp \mathbf{E}$; gdy kąt zawarty między $\pm\mathbf{E}$ i ν równa się 45°, składowa $f_{\nu\nu}$ znika, i pozostaje sama tylko składowa styczna).

Dla tego też podkreśliłem w tekście wyrazy: „nawiększego napięcia *normalnego*".

Czytelnik zresztą przekona się łatwo, że ogólne równanie (145) dla napięć głównych *dowolnego* wysiłu jest identyczne z warunkiem niezbędnym dla max.—min. $f_{\nu\nu}$, t. j. z równaniem $df_{\nu\nu} = 0$, gdzie znak różniczkowania dotyczy zmian kierunku wektora jednostkowego ν.

Siły przyłożone; źródła energii i zaburzeń elektromagnetycznych.

§ 59. Wspomniałem już, że zasadnicze równania różniczkowe (A), (B), § 11:

$$\mathbf{p} = c.\,curl\,\mathbf{M} \qquad (A)$$

$$\mathbf{q} = -c.\,curl\,\mathbf{E} \qquad (B)$$

a więc też wynikające z nich równania szczególniejsze (I), (II), (Ia) i t. d., zachodzą dla tych tylko części pola, w których niema *źródeł* energii elektromagnetycznej. To też, ze wszystkich naszych dotychczasowych roztrząsań, a przynajmniej tych, które dotyczyły środowiska nieruchomego, wykluczaliśmy *„źródła“* takie, t. j. wszelkie dziedziny przestrzeni, w których wytwarza się energia elektromagnetyczna z innych postaci energii. Z wyjątkiem nieodwracalnego wytwarzania się ciepła Joule'a w ciałach przewodzących nie uwzględniliśmy też żadnych procesów, w których energia elektromagnetyczna zostaje *pochłonięta*, t. j. przeistacza się na inne rodzaje energii. Jednem słowem, nie uwzględnialiśmy dotychczas ani *dodatnich* ani *ujemnych* źródeł energii elektromagnetycznej.

Obecnie zajmiemy się tą właśnie sprawą i omówimy też odpowiednie „siły przyłożone“, których obecność wymaga pewnej modyfikacyi pierwotnych równań Maxwellowskich. Ograniczymy się tu zresztą do rozważenia środowiska *nieruchomego*.

§ 60. Wyjdźmy z zasady zachowania energii i, aby obejść się nasamprzód bez wektora Poyntinga, rozważmy całą przestrzeń nieograniczoną lub też pewną jej dziedzinę τ zamkniętą zupełnie w skorupie, która ani nie przepuszcza, ani nie pochłania, ani też nie promieniuje energii. Taką byłaby warstwa przewodnika doskonałego, sztywnego i nieruchomego. Krócej: pomyślmy sobie dziedzinę τ energietycznie odosobnioną od świata zewnętrznego.

Niechaj u będzie, jak przedtem, gęstością energii elektromagnetycznej, λ — przewodnictwem, t. j. λE^2 lub ogólniej $\lambda\mathbf{E}.\mathbf{E}$ ciepłem Joule'a wytwarzanem (nieodwracalnie) na jednostkę czasu i na jednostkę objętości w dziedzinie τ, która może być zajęta przez izolatory, półprzewodniki lub przewodniki.

Otóż, jeżeli w τ niema żadnych źródeł energii, mamy według zasady zachowania energii, dla każdej chwili t

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda\mathbf{E}.\mathbf{E}\right) d\tau = 0, \qquad (172)$$

gdzie całka obejmuje dziedzinę τ. (Porówn. zresztą § 43.) Ubytek całkowity energii elektromagnetycznej w ciągu dowolnego czasu równa się ilości ciepła wytworzonej w tymże czasie.

Jeżeli natomiast w dziedzinie τ znajdują się źródła energii, dodatnie lub ujemne, o *produkcyjności* s, na jednostkę objętości i na jednostkę czasu, czyli o *wydajności* s na jednostkę objętości, zasada zachowania energii będzie wyrażona przez wzór:

$$\int s\,d\tau = \int \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \mathbf{E}.\mathbf{E}\right) d\tau, \tag{173}$$

który przeczytamy: energia dostarczana przez źródła równa się przyrostowi energii elektromagnetycznej więcej ciepło Joule'a.

Stosownie do tego, czy wytwarzanie (lub pochłanianie) energii w danym elemencie objętościowym $d\tau$ jest skojarzone z prądem elektrycznym $\mathbf{p}$ lub z prądem magnetycznym $\mathbf{q}$, źródło w $d\tau$ nazywa się *źródłem elektrycznem*, względnie *magnetycznem*.

Dotyczące wydajności źródeł oznaczmy przez s_e, względnie przez s_m, napiszmy więc w ogóle

$$s = s_e + s_m. \tag{174}$$

Dla źródła czysto elektrycznego będzie $s_m = 0$, dla magnetycznego natomiast $s_e = 0$.

Zarówno s_e jak s_m są oczywiście *skalarami*. Otóż, idąc za przykładem *Heaviside'a*,* wprowadzamy dwa wektory $\mathbf{e}$ i $\mathbf{m}$ takie, aby było

$$s_e = \mathbf{pe}, \quad s_m = \mathbf{qm}. \tag{175}$$

i nazywamy wektor $\mathbf{e}$ *siłą elektryczną przyłożoną*, zaś $\mathbf{m}$ *siłą magnetyczną przyłożoną*, w elemencie $d\tau$ (p. str. 198).

Zwróćmy uwagę na analogię tych iloczynów skalarnych do pracy mechanicznej $\mathbf{Pv}$ (na jednostkę czasu), porównywając siłę ponderomotoryczną $\mathbf{P}$ z „siłami“ $\mathbf{e}$ lub $\mathbf{m}$, zaś prędkość ruchu $\mathbf{v}$ z prądami $\mathbf{p}$, względnie $\mathbf{q}$.

Zauważmy też, że powyższe określenia nie wyznaczają sił przyłożonych zupełnie; albowiem, jeżeli np. $\mathbf{e}$ czyni zadość pierwszemu równaniu (175) dla danej wydajności s_e i dla danego prądu $\mathbf{p}$, równanie to będzie też spełnione przez sumę $\mathbf{e} + \mathbf{R}$, gdzie $\mathbf{R}$ jest wektorem prostopadłym do prądu, lecz zresztą najzupełniej dowolnym. Innemi słowy: z *jednego* równania skalarnego nie można zna-

---

* *Electromagnetic Theory*. Tom I, §§ 37—43.

leść *trzech* składowych wektora. Dla zupełnego wyznaczenia $\mathbf{e}$ w danym elemencie przestrzeni należy oczywiście znać wydajność s_e dla trzech różnych kierunków prądu elektrycznego, obranych dowolnie, byle tylko nie w jednej płaszczyźnie; dane te niezbędne będą też wystarczające (jeżeli tylko założymy dodatkowo, że kierunek $\mathbf{e}$ nie zależy w ogóle od kierunku $\mathbf{p}$). To samo dotyczy siły przyłożonej magnetycznej. Możemy sobie wyobrazić, że wektory $\mathbf{e}$, $\mathbf{m}$ wyznaczono istotnie w taki właśnie sposób dla całej dziedziny.

Wprowadzając siły przyłożone do (173) i uwzględniając, że $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{D}} + \lambda\mathbf{E}$, $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{B}}$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{B}}$, otrzymamy jako wyraz zasady zachowania energii:

$$\int [(\dot{\mathbf{D}} + \lambda\mathbf{E})\,(\mathbf{E} - \mathbf{e}) + \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{M} - \mathbf{m})]\,d\tau = 0, \qquad (176)$$

czyli

$$\int [\mathbf{p}(\mathbf{E} - \mathbf{e}) + \mathbf{q}(\mathbf{M} - \mathbf{m})]\,d\tau = 0. \qquad (176')$$

§ 61. Powyższe równanie przysługuje jedynie całej przestrzeni lub też *całej* dziedzinie τ, energietycznie odosobnionej, lecz nie jej częściom lub elementom $d\tau$. Każdy bowiem element oddaje w ogóle pewne ilości energii elementom sąsiednim lub też pobiera je od innych. Chcąc tedy zastosować zasadę zachowania do jakiegokolwiek elementu, dowolnie wyodrębnionego myślowo z dziedziny τ, należy uwzględnić te również ilości energii, t. j. uwzględnić przepływ energii elektromagnetycznej. *

Oznaczając prąd energii elektromagnetycznej, zmieniony dzięki obecności źródeł, przez $\mathbf{F}'$, na jednostkę czasu i na jednostkę powierzchni, mamy *dla każdego punktu przestrzeni*, zakładając wciąż jeszcze nieruchomość środowiska:

$$s = \frac{\partial u}{\partial t} + div\,\mathbf{F}', \qquad (177)$$

czyli, rozwijając podobnie jak w § 60:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{e})\,(\dot{\mathbf{D}} + \lambda\mathbf{E}) + (\mathbf{M} - \mathbf{m})\,\dot{\mathbf{B}} = -\,div\,\mathbf{F}'. \qquad (178)$$

---

* Zaniedbujemy tu prąd wszelkich *innych* rodzajów energii.

Aby stąd wyznaczyć prąd energii $\mathbf{F}'$ przez wektory $\mathbf{E}, \mathbf{M}, \mathbf{e}, \mathbf{m}$, musimy oczywiście wiedzieć, jak zależą od nich $\dot{\mathbf{D}}$ i $\dot{\mathbf{B}}$, t. j. musimy znać równania różniczkowe pola, które atoli nie będą już te same, co w nieobecności sił przyłożonych.

Otóż, nie wchodząc w sprzeczność z faktami doświadczalnemi, można przyjąć, w wypadku istnienia sił przyłożonych, równania pierwotne (A), (B), odejmując atoli w *„curlach“* siły przyłożone od sił $\mathbf{E}, \mathbf{M}$. * a więc pisząc dla dowolnego środowiska

$$\text{(A')} \qquad \mathbf{p} = c.\,curl\,(\mathbf{M} - \mathbf{m})$$

$$\text{(B')} \qquad \mathbf{q} = -\,c.\,curl\,(\mathbf{E} - \mathbf{e}),$$

t. j. dla środowiska nieruchomego

$$\text{(179)} \qquad \begin{cases} \dot{\mathbf{D}} + \lambda\mathbf{E} = c.\,curl\,(\mathbf{M} - \mathbf{m}) \\ \dot{\mathbf{B}} = -\,c.\,curl\,(\mathbf{E} - \mathbf{e}). \end{cases}$$

Warunek $div\,\mathbf{B} = 0$ pozostaje bez zmiany. Ze (179) mamy zresztą, podobnie jak w nieobecności sił przyłożonych $div\,\dot{\mathbf{B}} = 0$, $div\,(\dot{\mathbf{D}} + \lambda\mathbf{E}) = 0$, czyli—wprost z (A'), (B'): $div\,\mathbf{p} = 0$. $div\,\mathbf{q} = 0$.

Godząc się na powyższe równania różniczkowe, otrzymamy ze (178)

$$-\,div\,\mathbf{F}' = c\,[(\mathbf{E} - \mathbf{e})\,curl\,(\mathbf{M} - \mathbf{m}) - (\mathbf{M} - \mathbf{m})\,curl\,(\mathbf{E} - \mathbf{e}]$$

$$= -\,c\,div\,\mathrm{V}(\mathbf{E} - \mathbf{e})\,(\mathbf{M} - \mathbf{m}),$$

a więc, z pominięciem dowolnego wektora dodatkowego, czysto solenoidalnego:

$$\text{(180)} \qquad \mathbf{F}' = c\,\mathrm{V}(\mathbf{E} - \mathbf{e})\,(\mathbf{M} - \mathbf{m}),$$

podczas gdy w braku sił przyłożonych prąd energii elektromagnetycznej był $\mathbf{F} = c\,\mathrm{V}\mathbf{EM}$.

§ 62. Z równań (179) lub (A'), (B') widzimy, że pole elektromagnetyczne $\mathbf{E}, \mathbf{M}$ i jego zmiany w czasie *nie zależą zgoła od samych sił przyłożonych, lecz tylko od ich wirów (curlów).*

---

*) Porówn. Heaviside'a, loc. cit.; autor ten nazywa $\mathbf{E}, \mathbf{M}$ *„forces of flux“*, zaś $\mathbf{E} - \mathbf{e}$, $\mathbf{M} - \mathbf{m}$ *„forces of the field“*.

Tej jednak zależności pola i jego losów od samych tylko wirów sił przyłożonych można też dowieść z pewnego ogólniejszego punktu widzenia, t. j. nie uciekając się wcale do postaci szczególnej powyższych równań różniczkowych.

Dowodzenie to, dane przez Heaviside'a, opiera się na *solenoidalności prądów* **p** i **q**.

Istotnie, przypuśćmy, że w chwili t_0 cała przestrzeń τ jest wolna od sił elektrycznych i magnetycznych **E**, **M**, tak iż mamy wszędzie $u_0 = 0$, i że w chwili tej wprowadzono siły przyłożone **e**, **m** o rozmieszczeniu czysto *irotacyjnem*, t. j. takie, że

$$curl\,\mathbf{e} = curl\,\mathbf{m} = 0 \quad \text{wszędzie}$$

i

$$\mathbf{e}''_\nu - \mathbf{e}'_\nu = 0, \quad \mathbf{m}''_\nu - \mathbf{m}'_\nu = 0 \quad \text{u powierzchni nieciągłości.}$$

Wydajność wszystkich źródeł, dla dowolnego t, jest według (174) i (175)

$$\int s\,d\tau = \int \mathbf{pe}\,d\tau + \int \mathbf{qm}\,d\tau. \tag{181}$$

W celu obliczenia wartości całki wyrazu $\mathbf{pe}\,d\tau$ rozłóżmy przestrzeń τ na elementarne rurki prądu elektrycznego. Każda z nich jest zamkniętą w sobie. Będziemy więc mieli dla jednej z tych rurek, o przekroju $d\sigma$, pamiętając, że natężenie jej czyli moment $pd\sigma$ posiada wzdłuż całej rurki jednę i tę samą wartość: $pd\sigma \int \mathbf{e}d\mathbf{s}$, gdzie całka rozciąga się wzdłuż obwodu *zamkniętego*, a więc *znika*, skoro **e** jest irotacyjne i w założeniu, że dziedzina τ jest *acykliczną*. Ponieważ to samo zachodzi dla *każdej* rurki prądu elektrycznego, mamy $\int \mathbf{pe}\,d\tau = 0$. Podobnie też, rozkładając τ na rurki prądu magnetycznego, otrzymamy $\int \mathbf{qm}\,d\tau = 0$, a więc $\int s\,d\tau = 0$, tak iż według (173) będzie

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \mathbf{E}.\mathbf{E} \right) d\tau = 0.$$

Lecz dla $t = t_0$ mieliśmy $\mathbf{E} = 0$, $u = u_0 = 0$, z drugiej zaś strony u i $\lambda \mathbf{E}.\mathbf{E}$ nie mają nigdy i nigdzie wartości ujemnych; będzie więc dla każdego $t > t_0$:

$$u = 0, \text{ t. j. } E = 0, \; M = 0.$$

Układ więc *irotacyjny* sił przyłożonych **e**, **m** nie wytwarza żadnego pola **E**, **M**.

Lecz różnica $\mathbf{e}' - \mathbf{e}''$, $\mathbf{m}' - \mathbf{m}''$ dwóch układów sił przyłożonych, mających te same wiry, jest układem irotacyjnym; widzimy więc stąd, że siły przyłożone $\mathbf{e}'$, $\mathbf{m}'$ i $\mathbf{e}''$, $\mathbf{m}''$ wytwarzają jedno i to samo pole elektromagnetyczne **E**, **M**, skoro tylko mają te same wiry, *q.e.d.*

Można więc powiedzieć, że prawdziwemi *źródłami zaburzeń* elektromagnetycznych są *wiry* sił przyłożonych, t. j. te dziedziny przestrzeni, w których jest $curl\,\mathbf{e} \neq 0$ lub $curl\,\mathbf{m} \neq 0$ (włączając w to powierzchnie nieciągłości składowych normalnych $\mathbf{e}_\nu$, $\mathbf{m}_\nu$), podczas gdy prawdziwe *źródła energii* są tam, gdzie obok siły przyłożonej istnieje *prąd* elektryczny lub magnetyczny, dowolny, byle tylko nie normalny do odpowiedniej siły przyłożonej. Siedlisko siły przyłożonej, jednego lub drugiego rodzaju może tedy „pracować“ w pewnych chwilach, aby stać się „bezczynnem“ w pewnych innych chwilach czasu.

Przykład siły **m** stanowi t. zw. siła przyłożona *magnetyzacyi wewnętrznej*, o której wspomniałem już w § 47, a którą omówimy nieco szczegółowiej w *Magnetostatyce*. Analogiczną siłę przyłożoną *elektryczną* należałoby przyjąć dla pewnych ciał niezupełnie „sprężystych“ pod względem elektrycznym, t. j. dla tych, które po opuszczeniu pola elektrycznego zewnętrznego nie wracają do swego stanu pierwotnego. Inne przykłady siły przyłożonej **e** mamy w tak zwanych siłach *woltaicznych* (czyli *galwanicznych*), skojarzonych z procesami chemicznemi, i w siłach *termoelektrycznych*. na powierzchni granicznej dwóch różnych substancyj lub między częściami jednej substancyi, posiadającemi różne temperatury. Wytwarzanie się ciepła, odpowiadające siłom termoelektrycznym, różni się w sposób nader charakterystyczny od wytwarzania się ciepła Jouel'a; pierwsze wyraża się (na jednostkę czasu i objętości) przez iloczyn skalarny **pe**, drugie zaś przez λE^2 (ogólniej przez $\lambda\mathbf{E}.\mathbf{E}$), czyli, w założeniu, że $\dot{\mathbf{D}} = 0$, przez $\lambda^{-1}p^2$ (ogólniej $\mathbf{p}.\lambda^{-1}\mathbf{p}$). W drugim wypadku proces jest nieodwracalny, podczas gdy w pierwszym iloczyn **pe**, dla danego **e**, zmienia znak przy zmianie kierunku prądu elektrycznego: jeżeli dla danego kierunku prądu mamy wytwarzenie się ciepła, natenczas dla kierunku wprost przeciwnego będziemy mieli pochłanianie ciepła. Wytwarzanie się, zawsze dodatnie, ciepła Joule'a nie zależy, w ciałach izotropowych, od kierunku lecz jedynie tylko od natężenia prądu, w ciałach zaś anizotropowych nie doznaje żadnej zmiany przy odwróceniu kierunku prądu.

§ 63. *Warunki u powierzchni granicznej* dwóch dielektryków (w ogóle półprzewodzących) będą dla składowych *normalnych*

takie same jak przy nieobecnych siłach przyłożonych; te bowiem warunki wynikają z równań $div\,\mathfrak{p} = 0$, $div\,\mathfrak{q} = 0$, które dzięki istnieniu sił przyłożonych żadnej nie ulegają zmianie; porówn. §§ 17, 21.

Dla składowych *stycznych* otrzymamy natomiast warunki odmienne. Warunki te wynikają ze skończoności wektorów *curl* $(\mathfrak{M} - \mathfrak{m})$, *curl* $(\mathfrak{E} - \mathfrak{e})$. Możemy rozumować zupełnie podobnie jak w §§ 17 i 21, podstawiając jedynie $\mathfrak{M} - \mathfrak{m}$ za $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{E} - \mathfrak{e}$ za $\mathfrak{E}$. Otrzymamy przeto zamiast równości (43) i (44), str. 135:

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{e})\Theta = (\mathfrak{E}' - \mathfrak{e}')\Theta \qquad (182)$$

$$(\mathfrak{M} - \mathfrak{m})\Theta = (\mathfrak{M}' - \mathfrak{m}')\Theta, \qquad (183)$$

gdzie Θ jest wektorem jednostkowym w kierunku składowej stycznej wektora zredukowanego $\mathfrak{E} - \mathfrak{e}$, względnie $\mathfrak{M} - \mathfrak{m}$; wektor Θ jest wspólny jednej i drugiej stronie powierzchni granicznej. W równaniu (182) może on oczywiście mieć inny zupełnie kierunek niż w (183).

Każdy z tych warunków możemy zresztą wyrazić w postaci nieco odmiennej, która pod pewnym względem może być dogodniejszą, a mianowicie za pomocą wektora jednostkowego ν *normalnego* do powierzchni granicznej σ.

Niechaj $\mathfrak{R}$ będzie dowolnym wektorem, $\mathfrak{N}$ jego częścią normalną, zaś $\mathfrak{T}$ jego częścią styczną do powierzchni σ, co do kierunku i natężenia, tak iż $\mathfrak{R} = \mathfrak{N} + \mathfrak{T}$. Ponieważ $N = \nu\mathfrak{R}$, a więc $\mathfrak{N} = \nu(\nu\mathfrak{R})$, przeto będzie:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{R} - \nu(\nu\mathfrak{R}). \qquad (184)$$

Stosując to do rozważanego wypadku, możemy, zamiast (182), napisać równanie

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{e} - \nu[\nu(\mathfrak{E} - \mathfrak{e})] = \mathfrak{E}' - \mathfrak{e}' - \nu[\nu(\mathfrak{E}' - \mathfrak{e}')] \qquad (182')$$

i podobne zupełnie równanie zamiast (183).

§ 64. Dla siły ponderomotorycznej $\mathfrak{P}$ wyprowadziliśmy w § 45 wzór (V) z wyrazu energii, niezależnie od równań różniczkowych pola elektromagnetycznego. Otóż wzór ten będzie też ważny wówczas, gdy dopuścimy istnienie dowolnych sił przyłożonych $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, byle tylko przy rozważanych przesunięciach wirtualnych poszczególnych cząstek dielektryka wektory te towarzyszyły niezmiennie tym cząstkom. Istotnie, wyrazem „pracy“ wirtualnej siły $\mathfrak{e}$ będzie iloczyn skalarny tejże siły i zmiany wirtualnej indukcyi elektrycznej przez element do składający się zawsze z tych samych cząstek; ponieważ zaś podstawą rachunku przeprowadzonego w § 45 było właśnie założenie, że ta zmiana wirtualna indukcyi równa się zeru,

przeto przy rozważanych tam przesunięciach $\delta\mathfrak{a}$ źródła elektryczne będą nieczynne, t. j. ich „praca“ wirtualna będzie równa zeru. Toż samo dotyczy również sił przyłożonych magnetycznych. Równanie (119) pozostanie tedy prawdziwym wyrazem zasady zachowania energii i wyprowadzony zeń wzór (V) nie będzie wymagał żadnej zmiany ze względu na obecność sił przyłożonych.

Z tego to wzoru otrzymaliśmy następnie, w § 46, wzór (VI), zastępując mianowicie *curl* $\mathfrak{E}$, *curl* $\mathfrak{M}$ przez prądy $\mathfrak{q}$ i $\mathfrak{p}$ według równań różniczkowych (A), (B). Otóż, gdy istnieją siły przyłożone, mamy zamiast równań tych równania (A′), (B′); dzięki temu więc otrzymamy dla siły ponderomotorycznej dwa wyrazy dodatkowe zawierające *curl* $\mathfrak{e}$, *curl* $\mathfrak{m}$; rozumiejąc przez (VI) sumę wyrazów stojących po prawej stronie wzoru (VI), możemy napisać krótko:

$$(VI') \qquad \mathfrak{P} = (VI) - \frac{1}{c} V\mathfrak{D}\, curl\, \mathfrak{e} - \frac{1}{c} V\mathfrak{B}\, curl\, \mathfrak{m}.$$

Jeżeli siły przyłożone są irotacyjne, wyrazy dodatkowe znikają.

Moment ponderomotoryczny $\mathfrak{L}$ nie doznaje dzięki obecności *jakichkolwiek* sił przyłożonych żadnej zmiany.

Niezależnym od nich jest również wysił elektromagnetyczny Maxwellowski; postać jego wynikła bowiem ze wzoru pierwotnego (V) siły ponderomotorycznej, a więc bez względu na ten lub ów kształt równań różniczkowych pola elektromagnetycznego.

§ 65. W równaniach (A′), (B′), a więc, dla środowiska nieruchomego, w równaniach (179), należy sobie wyobrazić siły przyłożone $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ dla każdego punktu przestrzeni jako dane, czyli dowolnie przepisane, *wyraźne funkcye czasu*, i to dla wszelkikh rozważanych wartości t.

Jeżeli niema sił przyłożonych, pole czyni zadość równaniom różniczkowym *jednorodnym* $\dot{\mathfrak{D}} + \lambda\mathfrak{E} = c.\, curl\, \mathfrak{M}$, $\dot{\mathfrak{B}} = -c.\, curl\, \mathfrak{E}$ (pierwszego rzędu); dzięki temu stan pola w chwili „końcowej“ t_2, powiedzmy $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{M}_2$, zależy od jego stanu $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{M}_1$ w chwili „początkowej“ t_1 i oprócz tego jedynie od *odstępu* czasu $t_2 - t_1$, nie zaś od wyboru samej chwili t_1, Innemi słowy: zmiany pola zależą jedynie od długości czasu, jaki upłynął, nie zaś od tego, *kiedy* się to dzieje. Pole elektromagnetyczne stanowi więc wówczas układ *zupełny*, czyli *„niezakłócony“*. *

Gdy natomiast istnieją siły przyłożone, pole czyni zadość równaniom różniczkowym (179), również pierwszego rzędu, lecz *niejednorodnym*, a mianowicie zawierającym wyrazy dodatkowe $c.\, curl\, \mathfrak{e}$, $c.\, curl\, \mathfrak{m}$, które są dowolnie przepisanemi funkcyami czasu (i poło-

* Porówn. *Wykłady Zakopiańskie z dziedz. fizyki teoretycznej*. 1905.

żenia). Stan pola w chwili t_2 zależy wówczas nietylko od stanu w chwili t_1 i od długości odstępu czasu $t_2 - t_1$, lecz również od położenia chwili t_1 względem pewnej określonej chwili t_0, od której np. liczymy czas t tkwiący w funkcyach wektorowych **e** i **m**. Zmiany pola zależą nietylko od długości upływającego czasu, lecz również od tego, *kiedy* się to dzieje. Innemi słowy, pole elektromagnetyczne stanowi wówczas układ *niezupełny*, czyli *zakłócony*, lub też lepiej: wprowadzając do równań „siły przyłożone“, godzimy się świadomie na to, aby uważać pole jako układ niezupełny. Do postępowania zaś takiego zniewala nas w pewnych wypadkach brak dokładniejszej znajomości zjawisk splecionych z elektromagnetycznemi, w innych znowu — skłaniają nas do tego względy dogodności i prostoty rachunków.

Układ bowiem niezupełny można uzupełnić do obszerniejszego układu niezakłóconego jedynie tylko kosztem zwiększenia liczby wielkości niezależnych, mających określać jego stan chwilowy i jednocześnie liczby równań różniczkowych, którym wielkości te mają czynić zadość. Nie mogąc zadaniu temu podołać lub też chcąc uniknąć zbytniej zawiłości, należy zgodzić się na siły przyłożone, ogólniej: na wyrazy dodatkowe zawierające czas *explicite*.

Ściśle rzecz biorąc, możnaby powiedzieć, że zupełne wyrzeczenie się „sił przyłożonych“ równałoby się chęci rozważania jedynego tylko, bardzo zawiłego układu, a mianowicie całego Wszechświata.

ROZDZIAŁ IV.

Elektrostatyka i Magnetostatyka.

Rozdział IV.

Elektrostatyka i Magnetostatyka.

Pole elektrostatyczne.

§ 66. Ponieważ przy współistnieniu pola elektrostatycznego z magnetostatycznem wektory elektryczne i magnetyczne są zupełnie od siebie niezależne, możemy każde z tych pól rozważać *zosobna* i, gwoli jasności wykładu, uczynimy tak istotnie, nie bacząc na to, że pewne własności są wspólne obydwu tym rodzajom pola.

Zacznijmy od pola *elektrostatycznego*. Niechaj tedy w całej przestrzeni będzie stale $M = 0$, a więc też $B = \dot{B} = 0$; otrzymamy wówczas z równania (II) dla dowolnego środowiska (spoczywającego) $curl\ \mathbf{E} = 0$; w izolatorach doskonałych równanie (I) będzie już spełnione identycznie dzięki temu, że wymagamy, aby było $M = 0$ i aby siła, a więc też polaryzacya elektryczna nie zmieniały się z czasem; w przewodnikach lub półprzewodnikach będzie oprócz tego, według równania (Ia), $E = 0$. (Porówn. zresztą §§ 3 tudzież 29 i 32.)

Pole elektrostatyczne jest więc scharakteryzowane przez swą *irotacyjność* w całej swej rozciągłości:

$$curl\ \mathbf{E} = 0, \tag{185}$$

i przez to, że w ciałach *przewodzących* jest

$$E = 0. \tag{185a}$$

Odróżnianie „przewodników“ od „półprzewodników“ staje się tu zresztą zupełnie zbytecznem. Wnętrze jednych lub drugich, niezależnie od wartości liczebnej przewodnictwa λ, odgrywa jedynie rolę luki w polu elektrostatycznem. Substancya *przewodników* staje się sprawą nieistotną; należy jedynie uwzględnić ich kształty, rozmiary

i wzajemne położenie. Odróżnianie natomiast otaczających je izolatorów doskonałych, czyli krótko *dielektryków*, ze względu na wartość spółczynnika K, posiada zarówno tu, jak w polu zmiennem, pierwszorzędną wagę.

Ponieważ warunek (185) ma być spełniony w całej przestrzeni, przeto, według Twierdzenia VII *(Wstęp)*, siła elektryczna posiada wszędzie potencyał jednowartościowy, powiedzmy φ:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{186}$$

Skalarna ta funkcya położenia φ nazywa się *potencyałem elektrostatycznym* lub krócej *elektrycznym*. Linie siły elektrycznej są normalne do powierzchni izopotencyalnych $\varphi = \text{const.}$

Wewnątrz każdego przewodnika φ posiada, według (185a), wartość stałą. Ze względu na ciągłość składowej stycznej siły $\mathbf{E}$ składowa ta musi znikać nazewnątrz przewodnika, tuż przy jego powierzchni; linie więc siły elektrycznej są normalne do powierzchni przewodnika. Innemi słowy: powierzchnia każdego *przewodnika* jest, w polu elektrostatycznem, *powierzchnią izopotencyalną*. Możemy przeto napisać

$$\varphi = \text{const.} \tag{187}$$

dla każdego przewodnika, łącznie z jego powierzchnią, stanowiącą granicę dielektryka.

Własności powyższe przysługują zarówno dielektrykom jednorodnym i izotropowym, jak niejednorodnym i krystalicznym.

W dielektryku krystalicznym linie *polaryzacyi* elektrycznej nie będą w ogóle normalne do powierzchni izopotencyalnych, a więc też np. do powierzchni przewodników. Liniom *siły* natomiast własność ta w całej przysługuje pełni.

Ponieważ siła E jest wszędzie skończona, przeto dwie różne powierzchnie stałego potencyału nie mogą się przecinać wzajemnie. Powierzchnia taka może jednak przecinać się *ze sobą samą*; można łatwo dowieść,* że, wzdłuż linii przecięcia n liści powierzchni izopotencyalnej, liście te tworzą ze sobą kąty równe, a mianowicie każdy równy $\frac{\pi}{n}$; dla dwóch np. liści kąty te będą proste. Nietrudno też zrozumieć, że siła elektryczna znika w każdym punkcie takiego przecięcia, czyli, że przecięcie to stanowi tak zwaną *linię równowagi*.

§ 67. Określone w Rozdziale I ładunki elektryczne, prawdziwe lub pozorne, o rozmieszczeniu przestrzennem lub powierzchnio-

---

* Patrz np. Maxwella *El. & Mgnt.*, T. I. Rozdz. VI.

wem, możemy obecnie wyrazić za pomocą potencyału, a raczej jego pochodnych przestrzennych.

Dla gęstości przestrzennej ładunku *prawdziwego* mamy, według (186), zamiast wzoru (12):

$$\rho = -\,div\,(K\nabla\varphi), \tag{188}$$

gdzie K dla dielektryka krystalicznego jest operatorem wektorowym liniowym; uważając główne osie elektryczne kryształu jako osie spółrzędnych x, y, z, otrzymamy:

$$\rho = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_3\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]. \tag{188'}$$

Dla gęstości powierzchniowej, na granicy dwóch dielektryków izotropowych o spółczynnikach K, K', mamy zamiast (12a):

$$\eta = K\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - K'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)', \tag{189}$$

w szczególności zaś na powierzchni przewodnika zanurzonego w dielektryku izotropowym o spółczynniku K, zamiast (21):

$$\eta = -\,K\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \tag{190}$$

gdzie ν jest normalną zwróconą *ku* środowisku dielektrycznemu.

Gęstość przestrzenna ładunku *pozornego* będzie, według (14), § 7: $\rho' = -\,div\,\nabla\varphi$, czyli

$$\rho' = -\,\nabla^2\varphi, \tag{191}$$

gęstość zaś powierzchniowa, według (14a):

$$\eta' = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)' \tag{192}$$

w szczególności zaś na powierzchni przewodnika:

$$\eta' = -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \tag{193}$$

gdzie ν jest normalną zwróconą ku dielektrykowi. Wzory powyższe dla ładunków *pozornych* przysługują oczywiście *wszelkim* dielektrykom, t. j. również niejednorodnym i anizotropowym.

Dla środowiska izotropowego, jednorodnego ładunek prawdziwy jest wszędzie proporcyonalny do ładunku pozornego; według (188') i (191) mamy mianowicie: $\rho = -\,K\nabla^2\varphi = K\rho'$.

Omawiany już częstokroć sposób zachowywania się siły elektrycznej w „nieskończoności“ (E maleje jak r^{-2}) możemy wyrazić

przez potencyał, wymagając, aby ten malał jak r^{-1}. Zakładamy zresztą, raz na zawsze, że siedziby wszelkich ładunków elektrycznych nie wykraczają poza pewną dziedzinę skończoną, tudzież, że w dziedzinie tej suma algebraiczna wszystkich ładunków jest skończona.

§ 68. Do pola elektrostatycznego możemy zastosować wzór (135) czyli (135a), wyprowadzony we *Wstępie* dla dowolnego pola wektorowego *irotacyjnego*.

Zastępując w nim ogólny wektor **R** przez siłę elektryczną **E**, należy napisać jednocześnie ρ', η' zamiast ρ, η, albowiem według przyjętych tu, a wprowadzonych już w § 7 oznaczeń jest $div\,\mathbf{E} = \rho'$, $(\mathbf{E}' - \mathbf{E})\,\nu = \eta'$.

Jeżeli założymy jeszcze, że sam potencyał elektryczny φ jest wszędzie *ciągły*, ostatni wyraz po prawej stronie wzoru (135) zniknie i otrzymamy

$$4\pi\varphi = \int \frac{\rho' d\tau}{r} + \int \frac{\eta' d\sigma}{r} \tag{194}$$

gdzie pierwsza całka rozciąga się do całej przestrzeni, a więc obejmuje wszystkie ładunki pozorne o rozmieszczeniu przestrzennem, druga zaś (przy której dla krótkości opuściliśmy znak sumy) rozpościera się na wszystkie powierzchnie nieciągłości składowej normalnej siły elektrycznej, czyli obejmuje wszystkie ładunki pozorne powierzchniowe.

Rozumiejąc przez de' elementarny *ładunek pozorny*, o rozmieszczeniu bądź to przestrzennem, bądź to powierzchniowem ($\rho' d\tau$, względnie $\eta' d\sigma$) możemy zamiast (194) napisać sumarycznie

$$4\pi\varphi = \int \frac{de'}{r}. \tag{195}$$

Jeżeli zresztą potencyał doznaje nieciągłości $I = \varphi - \varphi'$, przy przejściu przez pewne powierzchnie a, mamy według przytoczonego dopiero co wzoru (135) dla $4\pi\varphi$ wyraz dodatkowy $I \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) da$, którego całkę należy rozciągnąć do wszystkich powierzchni nieciągłości potencyału. Lecz według tego, cośmy powiedzieli na str. 72—73, wyraz ten dodatkowy odpowiada rozmieszczeniu ładunku pozornego w tak zwanych *warstwach podwójnych;* każda powierzchnia nieciągłości potencyału jest mianowicie równoważna warstwie elektrycznej podwójnej o momencie równym skokowi potencyału I. Wzór (195), a raczej $4\pi\varphi = \sum \frac{de'}{r}$ zachowa przeto swe znaczenie przy ewentualnem istnieniu powierzchni nieciągłości potencyału.

Można więc powiedzieć, że każda „cząstka“, czyli ilość elementarna de' elektryczności pozornej daje w odległości r potencyał

$$\frac{1}{4\pi}\frac{de'}{r}, \tag{196}$$

a więc też odpowiednie pole elektryczne:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{de'}{r^2}\mathbf{r} \tag{197}$$

(porówn. str. 72), t. j. *pole o liniach siły prostych, radyalnych*, wybiegających lub zbiegających się w de' zależnie od tego, czy ładunek ten jest dodatni, czy też ujemny, i o natężeniu *odwrotnie proporcyonalnem do kwadratu odległości.*

Jeżeli środowisko jest izotropowe, mamy $de' = de/\mathrm{K}$, gdzie de jest ładunkiem prawdziwym. Jeżeli założymy jeszcze, że środowisko jest jednorodne i że w odległości r od ładunku prawdziwego de_1 znajduje się drugi ładunek prawdziwy de_2, otrzymamy według (197) i według § 45, dla siły ponderomotorycznej działającej na de_2 wyraz

$$\frac{de_1 . de_2}{4\pi \mathrm{K} r^2}\mathbf{r}^{*} \tag{198}$$

streszczający w sobie znane „prawo odwrotnych kwadratów“ czyli *prawo Coulomba.*

Treść wzoru (197) możemy też wyrazić, mówiąc, że każda „cząstka“ elektryczności jest siedliskiem początków lub końców pewnej liczby $n = de'$ rurek jednostkowych siły elektrycznej mających kształt stożków i rozmieszczonych *izotropowo* naokoło tej cząstki, tak iż każda z tych rurek wycina z dowolnej kuli, mającej swój środek w de', jednę i tę samą powierzchnię $4\pi r^2/n$; natężenie siły elektrycznej wyraża się bowiem przez liczbę rurek przypadających na jednostkę powierzchni.

Jeżeli dane jest rozmieszczenie elektryczności pozornej, t. j. jeżeli many ρ', η' i momenty ewentualnych warstw podwójnych, możemy według powyższych wzorów wyrazić potencyał φ, a stąd też siłę $\mathbf{E}$ w każdym punkcie za pomocą zwyczajnych kwadratur. Jeżeli nie znamy bezpośrednio tych gęstości (i momentów), lecz

---

* $\mathbf{r}$ jest wektorem jednostkowym wskazującym od de_1 do de_2; na de_1 działa siła ponderomotoryczna równa i wprost przeciwna powyższej sile działającej na de_2.

dane nam jest samo pole elektryczne, możemy natychmiast znaleść rozmieszczenie ładunków, mianowicie *

$$\rho' = div\,\mathbf{E},\quad \eta' = (\mathbf{E}' - \mathbf{E})\nu,\quad I = \varphi - \varphi',$$

a więc przedstawić pole to jako superpozycyę owych pól promienistych i izotropowych, otaczających elementarne cząstki elektryczności.

A możemy to uczynić dla *każdego*, dowolnie danego pola elektrostatycznego.

Oto jest interpretacya fizyczna wzoru $4\pi\varphi = \sum\frac{de'}{r}$. Nie zapomnijmy jednak, że wzór ten, a więc też i pola elementarne posłuszne prawu odwrotnych kwadratów, bynajmniej nie są charakterystyczne dla pola elektrostatycznego, lecz dają się zastosować do wszelkich pól wektorowych, byle tylko irotacyjnych.

Owe „cząstki elektryczności", wraz ze swemi polami promienistemi, niekoniecznie stanowić muszą *element fizyczny* pola elektrostatycznego i bynajmniej nie są charakterystyczne dla odpowiednich zjawisk. Twierdzić można jedynie tylko, że cząstka taka wraz ze swem polem stanowi, lub stanowić może (w pewnych przynajmniej zagadnieniach) *element odpowiednich rachunków*, albo, że tak powiem: nie element fizyczny rozważanych zjawisk, lecz raczej element matematyczny ich teoryj, element, którego wprowadzenie może być wygodne przy rozważaniu matematycznem pewnych zagadnień elektrostatyki.

Oczywiście też, inne zupełnie klasy zjawisk, jak pewne ruchy ciał odkształcalnych, przewodnictwo ciepła i t. d. możnaby przedstawić w podobny zupełnie sposób.

Gdy chodzi np. o ruch *niewirowy* płynu ściśliwego, istnieje tak zwany *potencyał prędkości*, powiedzmy φ, tak iż prędkość w dowolnym punknie jest dana przez $\mathbf{v} = \nabla\psi$. W tym wypadku $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$ jest ciągłe (w przeciwnym bowiem razie zerwałaby się ciągłość płynu); jeżeli dziedzina wypełniona płynem jest acykliczna, natenczas potencyał jest jednowartościowy, tak iż, rozważając całą przestrzeń, możemy napisać $4\pi\psi = -\int\frac{1}{r}\nabla^2\psi.d\tau$. Oznaczając przez ε gęstość masy płynu, mamy $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \mathrm{div}(\varepsilon\mathbf{v}) = 0$, czyli $\frac{d}{dt}(lg\varepsilon) + \nabla^2\psi = 0$, a więc

---

* O ile tylko przepisane pole wektorowe jest różniczkowalne, co zresztą raz na zawsze milcząco zakładamy.

$$4\pi\psi = \int \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (\lg\varepsilon).d\tau,$$

t. j. możemy przedstawić ruch płynu tak, jak gdyby każda jego cząstka indywidualna, byle tylko rozszerzająca się lub doznająca zagęszczenia w danej chwili, stanowiła źródło, dodatnie lub ujemne, wysyłające lub pochłaniające promieniście i jednakowo we wszystkich kierunkach pewne ilości płynu [a mianowicie ogółem masę płynu $\frac{d}{dt}(\lg\varepsilon).d\tau$ na jednostkę czasu], i jak gdyby ruch wypadkowy był superpozycyą ruchów elementarnych odpowiadających wszystkim tym źródłom. Byłoby jednak rzeczą dość dziwną, gdyby ktoś chciał powiedzieć, że takie właśnie źródła stanowią element fizyczny i że odpowiednie prawo odwrotnych kwadratów wyraża własność charakterystyczną wszystkich zjawisk ruchu irotacyjnego płynów.

Jeżeli w teoryi klasycznej dominował taki właśnie pogląd na klasę zjawisk elektrycznych (jak również magnetycznych), to okoliczność tę należy przypisać pobudkom i przyczynom czysto historycznym, jak np. temu faktowi szczególnemu, że Coulomb wynalazł swoją wagę skręceń i odkrył prawo odwrotnych kwadratów dla przyciągania lub odpychania się wzajemnego dwóch małych kulek naelektryzowanych znacznie wcześniej niż Faraday rozwinął pojęcie linij i rurek siły i zdołał skonstatować zasadniczą zależność działań elektrycznych od własności fizycznych środowiska. Ważną też rolę odegrały tu niezawodnie tryumfy mechaniki niebieskiej, oparte na Newtonowskiem prawie „powszechnego ciążenia“, a więc właśnie na prawie odwrotnych kwadratów; te zresztą tryumfy dały początek całej epoce tak zwanej „Fizyki sił centralnych“.*

Bądź co bądź, owe „cząstki elektryczności“ otoczone izotropowo promienistemi polami siły, chociażby tylko jako elementy rachunku matematycznego, oddały nauce olbrzymie usługi.

W teoryi Maxwella zeszły one, pomimo to, na drugi plan, a następcy jego i komentatorzy, Hertz, Heaviside, Emil Cohn, odsunęli je nieco dalej jeszcze.

Powszechnie wiadomo, jak w nowszych czasach elektroniści usiłują uczynić z cząstek, a raczej „atomów“ elektryczności, podstawowy *element fizyczny* wszech zjawisk elektromagnetycznych; co do poglądów szczegółowych, różnią się oni zresztą zasadniczo od dawniejszych zwolenników „działania na odległość“, przyjmują bowiem dla rozchodzenia się zaburzeń między elektronami równania różniczkowe Maxwella, a więc też ciągłość w czasie i przestrzeni, pole zaś własne każdego ich elektronu przestaje być izotropowem

---

* Patrz *H. Poincaré*, *Wartość Nauki*. Rozdział VII.

(i kojarzy się z magnetycznem), skoro tylko elektron się porusza. Nie bacząc jednak na szybko rosnący rozgłos i poczynione w pewnych dziedzinach zdobycze naukowe, teorya elektronów posiada, szczególniej w postaci, którą starał się jej nadać M. Abraham, wiele słabych stron. Nie tu wszakże, a najmniej w *Elektrostatyce*, jest miejsce do krytycznego jej omówienia.

§ 69. *Energia elektryczna* dowolnego pola, którą oznaczymy tu krótko przez U, jest według § 38, dla dielektryka *izotropowego, jednorodnego:*

$$U = \tfrac{1}{2}K\int E^2 d\tau. \tag{104a}$$

Ponieważ chodzi nam o pole elektrostatyczne, a więc irotacyjne, możemy wyraz ten przekształcić, korzystając wprost z Twierdzenia XI, podanego we Wstępie. Pamiętając, że to, co nazwaliśmy wówczas „natężeniem źródła", jest ładunkiem *pozornym*, który obecnie oznaczamy przez de', i że w dielektryku izotropowym, jednorodnym $K.de'$ równa się ładunkowi prawdziwemu de, mamy

$$U = \tfrac{1}{2}\int \varphi de = \tfrac{1}{2}\int \varphi\rho d\tau + \tfrac{1}{2}\sum\int \varphi\eta d\sigma \tag{199}$$

lub też

$$U = \frac{1}{4\pi K}\int\int \frac{de_1.de_2}{r}. \tag{200a}$$

We wzorze (199) całki obejmują wszystkie ładunki elektryczne rozmieszczone bądź przestrzennie, bądź powierzchniowo, w dielektryku lub na powierzchni przewodników; we wzorze (200a) należy każdą parę ładunków de_1, de_2 uwzględnić *jeden* raz tylko.

Zauważmy, że w historyi nauki postać (199) była wcześniejszą niż (104a). Maxwell dopiero przekształcił wyraz zawierający potencyały i ładunki na całkę przestrzenną kwadratu siły elektrycznej.* Jeżeli w niniejszej książce obraliśmy drogę odwrotną (co zresztą od czasów Hertza zaczęło już w zwyczaj wchodzić), uczyniliśmy to głównie ze względu na sprawę lokalizacyi energii i na bliższy związek postaci (104a) z równaniami różniczkowemi pola zmiennego.

* Porówn. *El. and Mgnt.*, T. I, Rozdz. IV.

Wzór (199) możemy rozciągnąć łatwo do dowolnego dielektryka, a więc w ogóle niejednorodnego i anizotropowego. Istotnie, według § 39 mamy wówczas

$$U = \tfrac{1}{2} \int \mathbf{E}\mathbf{D} d\tau, \tag{105}$$

a więc, wprowadzając potencyał φ:

$$U = -\tfrac{1}{2} \int \mathbf{D} \nabla\varphi . d\tau = \tfrac{1}{2} \int \varphi . \nabla \mathbf{D} . d\tau + \tfrac{1}{2} \sum \int \varphi (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \nu . d\sigma,$$

gdzie $\sum$ obejmuje wszystkie powierzchnie nieciągłości składowej normalnej polaryzacyi; lecz $\nabla \mathbf{D} = div\, \mathbf{D} = \rho$, zaś $(\mathbf{D}' - \mathbf{D})\nu = \eta$, tak iż otrzymujemy znowu (199).

Mamy więc, dla *dowolnego* środowiska dielektrycznego, w którem może znajdować się jakikolwiek układ przewodników, następujące, z elementarnych już podręczników znane twierdzenie:

Energia pola elektrostatycznego równa się połowie sumy (względnie całki) iloczynów ładunków prawdziwych i odpowiednich potencyałów.

Wzór (200a) traci natomiast swe znaczenie dla dielektryków niejednorodnych i krystalicznych. Zamiast niego mamy w ogólnym wypadku, podstawiając φ ze (195) do (199):

$$U = \frac{1}{4\pi} \int\int \frac{de'_1 . de_2}{r} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{4\pi} \int\int \frac{de_1 . de'_2}{r}, \tag{200}$$

gdzie całki obejmują pary ładunków, z których zawsze jeden ma być prawdziwy, drugi pozorny; r jest ich odległością wzajemną.

§ 70. Widzieliśmy już we Wstępie, że pole irotacyjne jest określone zupełnie jednoznacznie przez swe rozbieżności i nieciągłości, t. j. w naszym wypadku przez ładunki elektryczne przestrzenne lub powierzchniowe. Jeżeli dane są ich gęstości pozorne, otrzymamy całe pole elektryczne według (194), a więc przez zwyczajne kwadratury, i możemy z góry już być pewni, że wszelkie inne rozwiązania będą tylko formalnie różnemi wyrazami tego samego pola.

W większości jednak wypadków, i to praktycznie najważniejszych, rozmieszczenie wszystkich tych ładunków *nie jest dane*, tak iż z powyższych wzorów skorzystać nie można. Mam tu na myśli zagadnienia, które w następujący dają się sformułować sposób.

Dane jest trwałe rozmieszczenie ładunków prawdziwych *e jedynie w dielektrykach* (przestrzenne lub powierzchniowe), lecz nie na powierzchni przewodników; oprócz tego dane są albo

1) potencyały $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ poszczególnych przewodników, albo też

2) *całkowite* ich ładunki $e_1, e_2, \ldots e_n$;

chodzi o zbudowanie całego pola elektrostatycznego, a więc też o znalezienie rozmieszczenia ładunków $e_1, e_2, \ldots e_n$ na przewodnikach $1, 2, \ldots n$.

Zagadnienia tego rodzaju są bardzo trudne; istotnie też rozwiązano je dotychczas w bardzo szczupłej tylko liczbie wypadków szczególnych.

Przykłady zadań takich i ich rozwiązania poznamy nieco później. W tem miejscu okażemy tylko, że powyżej sformułowane zagadnienie dopuszcza *jedyne* rozwiązanie.

Istotnie, niechaj $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$ będą dwa pola, czyniące zadość wszystkim warunkom zadania, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{D}''$ niechaj oznaczają odpowiednie polaryzacye. Utwórzmy pole $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{E}''$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}' - \mathbf{D}''$. Ponieważ pola z jednym lub dwoma akcentami mają posiadać jedne i te same ładunki e w całem środowisku dielektrycznem, przeto dla pola $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ ładunki w dielektryku będą równe zeru. Energia więc tego pola będzie, według (199):

$$U = \tfrac{1}{2} \int \mathbf{E}\mathbf{D} d\tau = \tfrac{1}{2} \sum_1^n \varphi_i \int \eta_i d\sigma_i,$$

t. j.

$$U = \tfrac{1}{2} \sum \varphi_i e_i = \tfrac{1}{2} (\varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \ldots + \varphi_n e_n).$$

Lecz dla każdego z przewodników jest dany albo 1° potencyał albo też 2° ładunek całkowity; w pierwszym wypadku mamy $\varphi_i = \varphi_i' - \varphi_i'' = 0$, w drugim $e_i = e_i' - e_2'' = 0$. Dzięki więc danym zagadnienia znika dla każdego i albo φ_i albo też e_i, tak iż mamy $U = 0$; ponieważ zaś U jest sumą wyrazów zasadniczo dodatnich, przeto dla każdego punktu przestrzeni będzie $\mathbf{E} = 0$, t. j. $\mathbf{E}' = \mathbf{E}''$, co było do dowiedzenia.

§ 71. Niechaj układ n przewodników, o dowolnych kształtach, rozmiarach i konfiguracyi, znajduje się w dielektryku, który w ogóle może być niejednorodnym i anizotropowym.

Jeżeli w dielektryku niema żadnych ładunków prawdziwych, t. j. $\rho = 0$, $\eta = 0$, energia pola elektrostatycznego nazywa się, według utartego zwyczaju, energią układu przewodników naelektryzowanych, nie bacząc na to, że te bynajmniej nie są jej siedliskami.

W tym wypadku mamy według (199), zakładając zresztą, że sam potencyał wszędzie jest ciągły:

$$U = \tfrac{1}{2} \sum \varphi_i e_i = \tfrac{1}{2} (\varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \ldots + \varphi_n e_n), \qquad (201)$$

gdzie e_i jest całkowitym ładunkiem prawdziwym przewodnika i, zaś φ_i jego potencyałem.

Gdybyśmy, nie zmieniając nigdzie kierunku siły elektrycznej, zwiększyli natężenie jej E wszędzie m razy, natenczas wszystkie ładunki pozorne de', a więc też ładunki prawdziwe i, według (195), wartość potencyału φ w każdym punkcie pola i powierzchni przewodników, stałyby się również m razy większe. Każdy więc z potencyałów $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ będzie funkcyą *liniową i jednorodną* wszystkich ładunków $e_1, \ldots e_n$ (i odwrotnie), o spółczynnikach, które będą zależały *jedynie od kształtu, rozmiarów i konfiguracyi przewodników i od własności dielektryka.*

Oznaczając więc spółczynniki te dla φ_1 przez a_{11}, a_{12} ..., dla φ_2 przez a_{21}, a_{22}, ..., i t. d., będziemy mieli:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \ldots + a_{1n} e_n \\ \varphi_2 &= a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + \ldots + a_{2n} e_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n &= a_{n1} e_1 + a_{n2} e_2 + \ldots + a_{nn} e_n. \end{aligned}\right\} \qquad (202)$$

Podobnie też ładunek każdego przewodnika będzie funkcyą liniową i jednorodną potencyałów wszystkich przewodników. Oznaczając odpowiednie spółczynniki przez b_{11}, b_{12}, i t. d., możemy napisać:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= b_{11} \varphi_1 + b_{12} \varphi_2 + \ldots + b_{1n} \varphi_n \\ e_2 &= b_{21} \varphi_1 + b_{22} \varphi_2 + \ldots + b_{2n} \varphi_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= b_{n1} \varphi_1 + b_{n2} \varphi_2 + \ldots + b_{nn} \varphi_n. \end{aligned}\right\} \qquad (203)$$

Rozwiązując zresztą równania (202) ze względu na ładunki i porównywając z ostatniemi wzorami, możemy natychmiast wyrazić spółczynniki b przez spółczynniki a. Jedne i drugie zależą wyłącznie od własności geometrycznych układu przewodników i od własności dielektrycznych środowiska.

Wprowadzając (202) lub (203) do (201), otrzymamy energię elektryczną układu jako funkcyę *jednorodną kwadratową ładunków*, względnie *potencyałów* wszystkich przewodników; dwie te postacie jednej i tej samej rzeczy oznaczymy przez $U_{(e)}$, względnie przez $U_{(\varphi)}$.

Według znanej własności funkcyj jednorodnych drugiego stopnia i według (201) mamy:

$$\sum \frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi_i} \varphi_i = 2U = \sum e_i \varphi_i$$

$$\sum \frac{\partial U(e)}{\partial e_i} e_i = 2U = \sum \varphi_i e_i,$$

a więc:

$$(204) \qquad e_i = \frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi_i}, \quad \varphi_i = \frac{\partial U(e)}{\partial e_i} \quad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Lecz według (203) jest $\frac{\partial e_i}{\partial \varphi_k} = b_{ik}$, a więc $b_{ik} = \frac{\partial^2 U(e)}{\partial \varphi_k \partial \varphi_i}$ i podobnie $b_{ki} = \frac{\partial^2 U(e)}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k}$; toż samo rozumowanie można zastosować do spółczynników a. Mamy więc dla każdej pary wskaźników i, k należących do układu:

$$(205) \qquad a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}.$$

Możemy teraz napisać:

$$(206) \qquad U(e) = \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_k a_{ik} e_i e_k$$

$$(207) \qquad U(\varphi) = \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_k b_{ik} \varphi_i \varphi_k,$$

gdzie każda para wskaźników różnych ma być uwzględniona dwa razy, a więc np. dla układu złożonego z dwóch przewodników: $U(e) = \frac{1}{2} a_{11} e_1^2 + a_{12} e_1 e_2 + \frac{1}{2} a_{22} e_2^2$, i podobnie dla $U(\varphi)$.

Maxwell* nazywa wielkości a, o wskaźnikach jednakowych lub różnych, *spółczynnikami potencyału* lub *potencyalnemi*, b_{ik} o wskaźnikach różnych—*spółczynnikami indukcyi* lub *indukcyjnemi*, zaś b_{11}, b_{22}, ... b_{nn} *pojemnościami* przewodników 1, 2, ... n.

Znaczenie fizyczne każdego z tych spółczynników wypływa bezpośrednio z (202) i (203). Łącząc metalicznie z ziemią (dla której kładzie się konwencyonalnie $\varphi = 0$) wszystkie przewodniki z wyjątkiem jednego, np. 1, będziemy mieli $\varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = 0$, a więc $e_1 = b_{11} \varphi_1$, $e_2 = b_{21} \varphi_1$, $e_n = b_{n1} \varphi_1$. Pojemność b_{ii} wyraża więc ładunek przewodnika i, jeżeli potencyał jego równa się jedności, podczas gdy wszystkie inne są połączone z ziemią; b_{ik} wyraża ładunek przewodnika i, gdy potencyał przewodnika k równa się jedności, wszystkie zaś inne przewodniki, nie wykluczając samego i.

* *El. and Mgnt.* T. I, Rozdz. III.

są połączone z ziemią; innemi słowy: b_{ik} jest ładunkiem „wzbudzonym“ czyli „indukowanym“ na i przez k. Podobnie też a_{ii} jest potencyałem przewodnika i, gdy ładunek jego równa się jedności, podczas gdy wszystkie inne przewodniki są pozbawione ładunku; a_{ik} zaś jest potencyałem przewodnika i, gdy ładunek przewodnika k równa się jedności, podczas gdy wszystkie inne przewodniki wraz z przewodnikiem i są pozbawione ładunku.

Opierając się na tych uwagach, czytelnik sam wyrazi słowami treść fizyczną równości (205).

Dzięki tymże równościom wyznaczniki równań (202) lub (203) będą *symetryczne*.

Ponieważ energia U jest zawsze dodatnią, spółczynniki a i b muszą dla każdego układu przewodników czynić zadość pewnym warunkom, a mianowicie: wszystkie a_{ii}, b_{ii} (o wskaźnikach jednakowych) muszą być *dodatnie*, podobnie jak wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ i t. d. (porówn. Wstęp, str. 89).

Tak np. w wypadku *dwóch* tylko przewodników będziemy mieli

$$a_{11} > 0,\ a_{22} > 0,\ b_{11} > 0,\ b_{22} > 0$$

i oprócz tego

$$a_{11}a_{22} > a_{12}^2,\ b_{11}b_{22} > b_{12}^2.$$

Warunki dla spółczynników b wynikają zresztą z warunków dla a. Ostatnią nierówność możemy przeczytać: iloczyn pojemności dwóch przewodników jest większy od kwadratu ich spółczynnika wzajemnej „indukcyi“ elektrostatycznej.

Porównywając (202) z ogólnym wyrazem potencyału (195), zrozumiemy natychmiast, że wyznaczenie spółczynników a, a więc też i b, dla danego układu przewodników przedstawiać będzie te same trudności, co zagadnienie sformułowane w § 70. Dotyczące rachunki poznamy w ciągu dalszym na kilku przykładach.

Jeżeli mamy dwa przewodniki 1 i 2, z których pierwszy *otacza* zupełnie drugi, natenczas wszystkie rurki polaryzacyi, zaczynające się na 1, kończą się na 2, lub odwrotnie,* t. j.

$$e_2 = -e_1.$$

To samo zachodzi w przybliżeniu, jeżeli przewodniki 1 i 2, jak np. okładki butelki lejdejskiej, są bardzo bliskie siebie i stosunkowo

---

* Warstwa bowiem dielektryka zawarta między przewodnikami 1 i 2 jest, według założenia, pozbawiona ładunku prawdziwego.

odległe od innych przewodników. Zestawienie takie przewodników wraz z dzielącą je warstwą dielektryka nazywa się *kondensatorem*, same zaś przewodniki jego *okładkami*. Skoro warunek powyższy jest spełniony, mamy według (203)

$$b_{11} = -b_{12} = b_{22}; \tag{208}$$

wspólna ta wartość wszystkich trzech spółczynników nazywa się *pojemnością* kondensatora; oznaczając ją przez C, mamy

$$e_1 = C(\varphi_1 - \varphi_2) = -e_2. \tag{209}$$

Jeżeli dielektryk jest jednorodny i izotropowy, natenczas wszystkie spółczynniki b, a więc też pojemności b_{ii} są *wprost proporcyonalne do spółczynnika dielektrycznego K*.

Istotnie, przy danem φ, a więc też przy danem polu, ładunki prawdziwe $e_1, e_2, \ldots e_n$ są proporcyonalne do K, a według (203) mają też być proporcyonalne do wielkości b.

W tych samych warunkach, jak widzimy z (202), wszystkie spółczynniki a będą *odwrotnie proporcyonalne do K*.

§ 72. Rozważmy z kolei działania mechaniczne pola elektrostatycznego.

O ile chodzi o dielektryk, którego własności są przestrzennie *ciągłe*, który jednak może być niejednorodnym i anizotropowym, mamy, według wzorów ogólnych (Va), (Vb), § 49, na jednostkę objętości siłę ponderomotoryczną

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\rho - \tfrac{1}{2} \nabla_k(\mathbf{ED}) \tag{210}$$

i moment pary sił

$$\mathbf{L} = \mathbf{VDE}. \tag{211}$$

Jeżeli dielektryk jest izotropowy, moment ten znika, siła zaś $\mathbf{P}$ przybiera postać

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\rho - \tfrac{1}{2} E^2 \nabla K. \tag{212}$$

Jeżeli dielektryk jest też jednorodny, pozostaje pierwszy tylko wyraz, t. j. działanie na siedliska ładunku prawdziwego. Znaczenie fizyczne różnych tych wyrazów omówiliśmy już zresztą w Rozdziale III.

Wewnątrz przewodników jest $E = 0$, a więc też $P = 0$, $L = 0$. Działanie pola elektrostatycznego na ciała takie wyrazi się jednak przez układ sił przyczepionych do *elementów ich powierzchni*, stanowiących granicę między przewodnikami a dielektrykiem. Podobnie też na granicy dwóch *różnych dielektryków*, t. j. posiadających różne spółczynniki K, będą istnieć pewne siły ponderomoto-

ryczne, które należy liczyć na *jednostkę powierzchni*, nie zaś na jednostkę objętości.

Działania te na powierzchnie graniczne dają się najprościej wyprowadzić z układu napięć i ciśnień, czyli z wysiłu elektrycznego (§ 55)

$$\mathbf{f}_\nu = \mathbf{E}(\mathbf{D}\nu) - \tfrac{1}{2}\nu(\mathbf{E}\mathbf{D}) \qquad \text{(VIIe)}$$

który, jak widzieliśmy, daje też w ogóle siłę **P** i moment **L**. W samym bowiem wysile nie występują już pochodne przestrzenne wektorów **E**, **D** ani spółczynników dielektrycznych, które w punktach powierzchni granicznej przybierają wartości nieskończone. Wzory, wypływające z zastosowania wysiłu, powinny też zresztą być zgodne z wynikami, które otrzymuje się przez rozważanie powierzchni granicznej jako „warstwy przejściowej“ o malejącej aż do zera grubości.

Niechaj $d\sigma$ będzie elementem powierzchni granicznej, $\mathbf{S}d\sigma$ wypadkową siłą mechaniczną, działającą na ten element, czyli **S** na jednostkę powierzchni. Oznaczając składowe tego wektora, jak zwykle, przez S_1 i t. d., napiszemy $\mathbf{S} = \mathbf{i}S_1 + \mathbf{j}S_2 + \mathbf{k}S_3$.

Wszelkie symbole bez akcentów niechaj dotyczą jednej strony powierzchni σ, z akcentami zaś—drugiej; normalna ν niechaj będzie zwrócona ku pierwszej stronie, t. j. od dziedziny akcentowanej do dziedziny nieakcentowanej, że tak powiem. Wówczas będzie $S_1 = f_{\nu 1} - f'_{\nu 1}$, i tak dalej, t. j. $\mathbf{S} = \mathbf{i}f_{\nu 1} + \mathbf{j}f_{\nu 2} + \mathbf{k}f_{\nu 3} - (\mathbf{i}f'_{\nu 1} + \mathbf{j}f'_{\nu 2} + \mathbf{k}f'_{\nu 3})$, czyli poprostu:

$$\mathbf{S} = \mathbf{f}_\nu - \mathbf{f}'_\nu. \qquad (213)$$

Stosując tedy wysił elektryczny (VIIe), otrzymamy wzór ogólny

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{D}\nu) - \mathbf{E}'(\mathbf{D}'\nu) - \tfrac{1}{2}\nu(\mathbf{E}\mathbf{D} - \mathbf{E}'\mathbf{D}') \qquad \text{(VIIIe)}$$

zachodzący dla powierzchni granicznej dwóch jakichkolwiek środowisk, z których każde nawet może być krystalicznem. Wprowadzając gęstość u_e energii elektrycznej, możemy napisać krócej:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{D}\nu) - \mathbf{E}'(\mathbf{D}'\nu) - \nu(u_e - u'_e). \qquad \text{(VIIIe)}$$

Siła ta mechaniczna posiada więc oprócz składowej normalnej, równej różnicy gęstości energii po jednej i drugiej stronie, w ogóle jeszcze pewne składowe w kierunkach samych wektorów elektrycznych **E** i **E'**. Cała więc siła **S** w pewnych tylko warunkach szczególnych będzie czysto normalną, w ogóle zaś posiadać też będzie pewną składową styczną do powierzchni granicznej.

Wzór powyższy zastosujemy teraz do kilku wypadków szczególnych.

§ 73. Jeżeli powierzchnia graniczna *dwóch dielektryków* dowolnych jest *pozbawiona ładunku prawdziwego*, t. j. jeżeli

$$\mathbf{D}'\nu = \mathbf{D}\nu,$$

mamy według (VIIIe)

$$\mathbf{S}_0 = (\mathbf{E} - \mathbf{E}')\,(\mathbf{D}\nu) - \nu(u_e - u'_e), \tag{214}$$

gdzie znaczek $_0$ ma wskazywać na brak ładunku. Jeżeli obadwa dielektryki są *izotropowe*, o spółczynnikach skalarnych K, K', mamy $\mathbf{D} = K\mathbf{E}$, $\mathbf{D}' = K\mathbf{E}'$ i wektory $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$, ν leżą w jednej płaszczyźnie. Ponieważ składowa styczna siły elektrycznej jest ciągła, przeto wektor $\mathbf{E} - \mathbf{E}'$ jest normalny do powierzchni granicznej. Oznaczając więc kąty $(\mathbf{E}, \nu)$, względnie $(\mathbf{E}', \nu)$ przez θ, θ', otrzymamy

$$\mathbf{S}_0 = \tfrac{1}{2}\nu\,[KE^2(2\cos^2\theta - 1) - K'E'^2(2\cos^2\theta' - 1)],$$

czyli

$$\mathbf{S}_0 = \tfrac{1}{2}\nu\,[KE^2\cos 2\theta - K'E'^2\cos 2\theta'] = \nu\,[u_e\cos 2\theta - u'_e\cos 2\theta']. \tag{215}$$

Siła więc mechaniczna na powierzchnię nienaelektryzowaną jest w tym wypadku *normalną* do powierzchni.

Jeżeli linie siły elektrycznej przeszywają dany element tej powierzchni normalnie, t. j. $\theta = \theta' = 0$, mamy

$$\mathbf{S}_0 = \nu(u_e - u'_e) \tag{216}$$

= różnicy napięć (głównych) wzdłuż linij elektrycznych, co było do przewidzenia.

Zastępując powierzchnię graniczną przez warstwę przejściową, stosując do niej wyraz $-\frac{1}{2}E^2\nabla K$, według (212), i czyniąc następnie grubość warstwy równą zeru, czytelnik przekona się łatwo, że i tym również sposobem otrzymuje się wyraz (215) siły powierzchniowej.

Jeżeli powierzchnia graniczna jest *naelektryzowana*, t. j. jeżeli $\mathbf{D}\nu - \mathbf{D}'\nu = \eta \neq 0$, natenczas mamy oprócz siły $\mathbf{S}_0$ jeszcze dwa wyrazy zaniechane w (214), a więc $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{E}'\eta$. Przekształcenie tego wyrazu ogólnego na inne postacie i wysłowienie ich w języku fizycznym pozostawiam czytelnikowi.

Głośny wzór Maxwella, według którego siła mechaniczna $\mathbf{S}$ działająca na powierzchnię naelektryzowaną równa się *gęstości ładunku pomnożonej przez średnią arytmetyczną sił elektrycznych* panujących po jednej i drugiej stronie, t. j. $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\eta(\mathbf{E} + \mathbf{E}')$*, nie

* *El. and Mgnt.* T. I. R. V.

jest ogólnym, lecz zachodzi dla dielektryków *izotropowych*, i to wówczas tylko, gdy ich spółczynniki są *równe*. Wzór ten wynika też dość łatwo z (VIIIe). Istotnie, kładąc $K' = K$, a więc $\eta = K(\mathbf{E} - \mathbf{E}')\nu$, mamy przedewszystkiem

$$\frac{1}{K}\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{E}\nu) - \mathbf{E}'(\mathbf{E}'\nu) - \tfrac{1}{2}\nu(E^2 - E'^2).$$

Niechaj α będzie wektorem jednostkowym w kierunku części siły $\mathbf{S}$ stycznej do powierzchni, tak iż $\mathbf{S} = \nu(\mathbf{S}\nu) + \alpha(\mathbf{S}\alpha)$. Mnożąc skalarnie ostatnie równanie raz przez ν, drugi raz przez α i uwzględniając, że $\nu^2 = 1$, $\nu\alpha = 0$, i że składowa styczna siły elektrycznej jest ciągła, t. j. $\mathbf{E}\alpha = \mathbf{E}'\alpha$, a więc też $E^2 - E'^2 = (\mathbf{E}\nu)^2 - (\mathbf{E}'\nu)^2$, otrzymamy

$$\mathbf{S}\nu = \tfrac{1}{2}K[(\mathbf{E}\nu)^2 - (\mathbf{E}'\nu)^2] = \tfrac{1}{2}\eta(\mathbf{E}\nu + \mathbf{E}'\nu)$$

$$\mathbf{S}\alpha = (\mathbf{E}\alpha)\eta = \tfrac{1}{2}\eta(\mathbf{E}\alpha + \mathbf{E}'\alpha),$$

a więc

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}')\eta, \quad \text{dla } K = K', \tag{217}$$

jak zapowiedziano wyżej.

§ 74. Rozważmy wreszcie działanie mechaniczne na powierzchnię *przewodnika* zanurzonego w dowolnym dielektryku.

Jeżeli weźmiemy normalną ν zwróconą *ku* dielektrykowi, natenczas będzie $E' = D' = u'_e = 0$, a więc według (VIIIe): $\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{D}\nu) - \nu u_e$. Ponieważ zaś siła elektryczna jest do powierzchni przewodnika normalną, możemy napisać $\mathbf{E} = \nu E$, a więc:

$$\mathbf{S} = \nu[E(\mathbf{D}\nu) - u_e] = \nu[E(\mathbf{D}\nu) - \tfrac{1}{2}\mathbf{E}\mathbf{D}],$$

czyli

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}\nu E(\mathbf{D}\nu) = \tfrac{1}{2}\mathbf{E}\eta. \tag{218}$$

Siła ta mechaniczna jest więc wszędzie *normalna* do powierzchni przewodnika, nawet w dielektryku krystalicznym; wielkość zaś jej równa się natężeniu pola elektrycznego w danem miejscu, pomnożonemu przez połowę gęstości powierzchniowej ładunku prawdziwego.

Jeżeli środowisko jest *izotropowe*, mamy $\mathbf{D}\nu = K(\mathbf{E}\nu) = K\mathbf{E}$, a więc

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}\nu K E^2 = \nu u_e. \tag{219}$$

t. j. każdy element powierzchni przewodnika zachowuje się tak, jak gdyby urywające się na nim rurki elektryczne ciągnęły go na-

zewnątrz z siłą równą swemu napięciu głównemu, osiowemu. Istotnie, widzieliśmy już w § 58, że napięcie to wzdłuż rurek elektrycznych równa się liczebnie gęstości energii elektrycznej. Obecnie równość ta staje się oczywistą, skoro się uwzględni sposób, w jaki obliczyliśmy pierwotnie energię kondensatora płaskiego ze siły ponderomotorycznej $\frac{1}{2}KE^2$ normalnej do jego okładek. (Porówn. str. 180 i następne.)

§ 75. Opierając się na powyższych wzorach, możnaby przez zesumowanie wektorowe wyrazów elementarnych $\mathbf{S}d\sigma$ obliczyć całkowite działanie mechaniczne pola elektrostatycznego na każdy z przewodników stanowiących dowolny układ.

W pewnych atoli wypadkach rachunek oparty na rozwiniętych w § 71 wzorach energii elektrycznej takiego układu może być dogodniejszy.

Przypomnijmy sobie z Rozdziału III, że wszelkie siły ponderomotoryczne otrzymaliśmy z przyrównania pracy mechanicznej ubytkowi energii pola: $\delta W = -\delta U$, w założeniu, że przy przesunięciu wirtualnem *ładunek prawdziwy każdej cząstki pozostaje niezmiennym*. Wówczas to właśnie pole pracuje kosztem własnej tylko energii.

Stosując to wprost do układu przewodników rozważonego w § 71, otrzymamy więc

$$\delta W = -\delta U, \tag{220}$$

skoro tylko założymy, że podczas przesunięcia *każdy z ładunków* $e_1, \ldots e_n$ *jest niezmienny*, t. j. że wszystkie przewodniki są *izolowane*. Pod tym też warunkiem obliczyliśmy pierwotnie energię elektryczną z pracy kondensatora.

Według wzoru (206) otrzymamy przeto

$$\delta W = -\frac{1}{2}\sum\sum e_i e_k \delta a_{ik}. \tag{221}$$

Niechaj konfiguracya całego układu będzie określona przez szereg parametrów wzajemnie niezależnych x_1, x_2 i t. d., odpowiednie zaś siły ponderomotoryczne, w uogólnionem znaczeniu słowa, niechaj będą X_1, X_2, ..., tak iż np. $X_1\delta x_1$ będzie pracą wykonaną przez pole przy przesunięciu δx_1. Opuszczając, dla udogodnienia pisowni, wskaźniki, oznaczymy przez x jakikolwiek z pośród tych parametrów, przez X zaś odpowiednią siłę.

Otrzymamy wówczas, według (220)

$$X = -\frac{\partial U_{(e)}}{\partial x} \tag{222}$$

czyli, według (221):

$$X = -\tfrac{1}{2}\sum_i\sum_k e_i e_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x}, \qquad (223)$$

a równań takich będzie tyleż, ile jest parametrów niezależnych, t. j. ile stopni swobody posiada cały układ. Aby obliczyć z nich istotnie siły X należy oczywiście znać spółczynniki a jako funkcye parametrów. Pewne zresztą a mogą od danego x nie zależeć; wówczas odpowiednie pochodne odpadną z powyższej sumy. Z pośród parametrów x niektóre mogą określać np. położenie względne przewodników, inne znowu rozmiary lub kształty jednego z nich; w ogóle bowiem powierzchnie przewodników mogą też być odkształcalne.

§ 76. Powyżej założyliśmy, że ładunki są stałe, t. j. że przewodniki są izolowane; w tych warunkach układ zachowywał się jako odosobniony energietycznie, a gdy pracował, działo się to kosztem własnej tylko energii.

Inaczej zupełnie ma się rzecz, gdy *potencyały przewodników są niezmienne*, gdy więc np. każdy z nich jest połączony metalicznie z dodatnim lub ujemnym biegunem stałego elementu galwanicznego. Wówczas układ przewodników, a raczej pole elektryczne nie pracuje już kosztem własnej energii U, lecz podczas przesunięcia przewodników pobiera ze źródeł tych (np. elektrochemicznych) pewne ilości energii.

Jak wielkie są te zasiłki? Aby na pytanie to odpowiedzieć, zestawia się trzy różne postacie wyrazu energii elektrycznej w równaniu identycznem:

$$U_{(e)} + U_{(\varphi)} - \sum \varphi_i e_i = 0$$

i tworzy się jego waryacyę zupełną, t. j. ze względu na wszystkie ładunki, potencyały i parametry:

$$\sum_i \left(\frac{\partial U_{(e)}}{\partial e_i} - \varphi_i\right) \delta e_i + \sum_i \left(\frac{\delta U_{(\varphi)}}{\partial \varphi_i} - e_i\right) \delta \varphi_i +$$

$$\sum_x \left(\frac{\partial U_{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial U_{(\varphi)}}{\partial x}\right) \delta x = 0.$$

Dzięki związkom (204), § 71, każdy z dodajników pierwszych dwóch sum znika, tak iż pozostaje trzecia tylko suma; ponieważ zaś pa-

* Maxwell, loc. cit. art. 93 b.

rametry x są wzajemnie niezależne, będzie dla każdego z nich zosobna:

$$\frac{\partial U(\varphi)}{\partial x} = -\frac{\partial U(e)}{\partial x}. \tag{224}$$

Mamy więc przy *stałych potencyałach* wszystkich przewodników:

$$X = +\frac{\partial U(\varphi)}{\partial x}, \tag{225}$$

t. j. według (207):

$$X = \tfrac{1}{2}\sum_i\sum_k \varphi_i\varphi_k \frac{\partial b_{ik}}{\partial x} \tag{226}$$

a wyraz pracy mechanicznej pola elektrostatycznego będzie teraz:

$$\delta W = +\delta U \quad (\varphi_1, \ldots \varphi_n \text{ niezmienne}). \tag{227}$$

Praca ta będzie więc równa nie ubytkowi, lecz *przyrostowi* energii elektrycznej pola. Aby tedy podczas przesunięcia przewodników utrzymać ich potencyały na stałych wysokościach, elementy galwaniczne lub inne źródła muszą dostarczyć układowi ilość energii równą *dwukrotnej* ilości pracy mechanicznej, t. j. $2\delta W$.

Analogiczne stosunki napotkamy przy rozważaniu energii i działań ponderomotorycznych układu prądów elektrycznych czyli wirów magnetycznych, nieomal statecznych, a więc w tak zwanej *Elekrodynamice*, w ciaśniejszem znaczeniu słowa.

Zauważmy tu wreszcie, że energia U jest *jednowartościową* funkcyą parametrów x, że więc (zarówno przy ładunkach stałych, jak przy potencyałach stałych) praca mechaniczna układu zależy tylko od jego konfiguracyi początkowej i końcowej, nie zaś od sposobu czyli od „drogi“, po jakiej układ przechodzi z jednej do drugiej. Można to wyrazić krótko, mówiąc, że siły ponderomotoryczne X, względnie $-X$, posiadają w funkcyi U potencyał jednowartościowy.

§ 77. Na zakończenie sprawy działań mechanichnych jeszcze słów kilka co do porównania pola elektrycznego z polem *grawitacyjnem*.

Dla dielektryka izotropowego, jednorodnego, o spółczynniku $K = 1$, mamy gęstość energii:

$$u_e = \tfrac{1}{2}E^2, \tag{a}$$

siłę ponderomotoryczną na jednostkę objętości:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\,div\,\mathbf{E} \tag{b}$$

i odpowiedni wysił elektryczny (według VIIe):

$$\mathbf{f}_\nu = \mathbf{E}(\mathbf{E}\nu) - \tfrac{1}{2}\nu.E^2. \qquad (c)$$

Z drugiej strony, dla gęstości energii grawitacyjnej możemy napisać, według § 37, i godząc się na taki wybór jednostek, przy którym stała $k = 1$:

$$u_g = h - \tfrac{1}{2}F^2, \qquad (a')$$

gdzie h jest stałą dodatnią, wektor zaś $\mathbf{F}$ wyobraża siłę wywieraną na jednostkę masy; siła na jednostkę objętości będzie

$$\mathbf{P} = -\mathbf{F}\,div\,\mathbf{F} \qquad (b')$$

(albowiem gęstość masy grawitacyjnej jest dana przez $-div\,\mathbf{F}$); stąd zaś otrzymamy odpowiedni *wysił grawitacyjny*

$$\mathbf{f}_\nu = -\mathbf{F}(\mathbf{F}\nu) + \tfrac{1}{2}\nu.F^2. \qquad (c')$$

Charakterystyczną więc różnicę między polem elektrycznem (lub magnetycznem) a polem grawitacyjnem, którą Maxwell podkreślił już w roku 1861 *, można tedy wyrazić w sposób następujący:

Podczas gdy rurki elektryczne (lub magnetyczne) zachowują się jak gdyby były *napięte podłużnie i ściśnięte poprzecznie*, a więc starają się skrócić i rozprężyć, rurki grawitacyjne doznają *ciśnienia podłużnego i napięcia poprzecznego*, czyli starają się wydłużyć i jednocześnie zmniejszyć swą grubość.

To też dwa ładunki elektryczne jednoimienne *odpychają* się wzajemnie, podczas gdy dwie cząstki grawitacyjne jednoimienne (a wszystkie są jednoimienne) *przyciągają* się, pomimo że w jednym i drugim wypadku obraz pola, t. j. kształt i rozmieszczenie rurek siły, mogą być zupełnie te same.

Ocena zresztą, z punktu widzenia fizycznego, teoryj ciążenia, które usiłowano oprzeć na wysile grawitacyjnym, bynajmniej nie należy do tematów niniejszej książki.

Zagadnienia elektrostatyczne specyalne.

§ 78. W dziale tym zajmiemy się przedewszystkiem klasą zagadnień sformułowanych w § 70, a znanych pod utartą nazwą

---

* *On physical lines of force*, Wstęp do Części Pierwszej; w tłumacz. niemieckiem w „Ostwald's Klassiker", str. 8.

problematów *„rozmieszczenia elektrycznego“*, t. j. rozmieszczenia ładunku na powierzchni przewodników, w stanie równowagi.

Od samego już jednak początku wprowadzimy pewne ograniczenia upraszczające, a mianowicie założymy:

1° że dielektryk jest *izotropowy* i *jednorodny*,

2° że jest *pozbawiony ładunku* (z wyjątkiem pewnych miejsc, w których, o ile to założymy wyraźnie, mogą się znajdować ładunki „punktowe“).

Poza tem przypuścimy, że sam potencyał elektrostatyczny jest wszędzie ciągły i że w „nieskończoności“ (o ile chodzić będzie o całą przestrzeń) maleje jak $1/r$, w objaśnionem już wielokrotnie znaczeniu wyrazów.

W tych warunkach mamy, w całym dielektryku, $div\,\mathbf{E} = 0$, czyli

$$\nabla^2\varphi = 0, \tag{228}$$

gdzie φ jest jednowartościową funkcyą skalarną położenia, ciągłą i skończoną wraz zo swojemi pochodnemi (po wykluczeniu ewentualnych „punktów elektrycznych“).

Chodzi więc o wyznaczenie φ dla wszystkich punktów dielektryka jako całki równania Laplace'a (228), któraby przybierała na powierzchni danych przewodników 1, 2, ... n przepisane wartości $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, albo też dawała przepisane ich ładunki całkowite $e_1, e_2, \ldots e_n$, t. j. sprawiała iż

$$-\int \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_i}\, d\sigma_i = e_i, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Poza tem całka ta ma być ciągłą i t. d., i zachowywać się we wskazany sposób w „nieskończoności“.

Otóż zadania takie, jak już wspomniałem, zdołano rozwiązać w nader szczupłej tylko garstce przypadków szczególnych, a trudną ich stronę stanowi właśnie owo przystosowanie całek równania Laplace'a do warunków granicznych, do powierzchni przewodników, lub też, innemi słowy poniekąd: znalezienie całki dość ogólnej, aby do warunków tych dała się przystosować.

Bądź co bądź, każde z takich zadań, dopuszcza, jak widzieliśmy, jedyne tylko rozwiązanie. Skoro więc uda się komuś, ślepym chociażby trafem, znaleść całkę w tej lub owej postaci, czyniącą zadość wszystkim przepisanym warunkom, nie ma potrzeby szukać innych, wiedząc z góry, że mogą one być formalnie tylko różne od tamtej. Należy też zauważyć, że niekiedy znajdywano najprzód rozwiązanie, czyli „odpowiedź“, a później dopiero odpowiednie zagadnienie, czyli pytanie, t. j. przekonawszy się, że taka a taka funkcya φ czyni zadość równaniu Laplace'a, dociekano na-

stępnie, na jakich powierzchniach geometrycznych przybiera wartości stałe, a następnie utożsamiano te powierzchnie z powierzchniami przewodników. Dla celów praktycznych rozwiązania takie mogą być niemniej cenne; w przyrządach bowiem, mających służyć do pomiarów elektrostatycznych, można przewodnikom nadać takie właśnie kształty, dla jakich posiada się rozwiązanie, zupełnie niezależnie od jego rodowodu. To też Maxwell nawet gorąco poleca swym czytelnikom *Electricity and Magnetism* (Rozdz. VII, T. I.) zapoznawanie się z wynikami tej „odwrotnej metody", tem bardziej, że z danego rozwiązania wynikają przez pewne przekształcenia całe szeregi innych.

Dla pewnych zresztą rodzajów tych zagadnień, szczególniej zaś dla przewodników o postaci kulistej, wypracowano procedury metodyczne, dość potężne i stosunkowo wygodne w zastosowaniu, a złożyły się na to prace najgenialniejszych matematyków. Opierają się one na teoryi tak zwanych *harmonicznych funkcyj kulistych*, na metodzie *obrazów elektrycznych i inwersyi*, na zastosowaniu przekształceń na *spółrzędne krzywoliniowe*, szczególniej normalne, i tak dalej. Z przedmiotu tego, który posiada bardzo bogatą literaturę, wybierzemy zaledwie kilka punktów, dotyczących rozważań ogólnych, i niewielką liczbę przykładów.

§ 79. *Kondensator płaski.* — Dwie okładki metalowe płaskie, równoległe do siebie, niechaj będą oddzielone warstwą dielektryka o spółczynniku K. Załóżmy, że grubość l *tej warstwy jest bardzo mała w porównaniu z wymiarami okładek;* jeżeli te np. mają kształt krążków o promieniu R, których środki znajdują się na tej samej prostej prostopadłej do ich płaszczyzn, załóżmy, że l jest bardzo małe w stosunku do R. Wówczas potencyał φ między okładkami, a mianowicie dla punktów *niezbyt bliskich krawędzi* (obwodu), będzie zależał tylko od odległości tych punktów od okładek. Połóżmy płaszczyznę yz na powierzchni wewnętrznej okładki 1-ej, biorąc oś x-ów dodatnich w kierunku 1,2, t. j. od 1-ej do 2-ej okładki. Wówczas potencyał będzie funkcyą samego x, tak iż równanie Laplace'a zredukuje się do

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0. \qquad (229)$$

W języku matematycznym powiedzianoby, że chodzi tu o dwie płaszczyzny przewodzące nieskończenie rozległe i równoległe do siebie. Jest to wypadek najprostszy, a ze względu na zależność φ od jednej tylko zmiennej niezależnej stanowi tak zwane zagadnienie *jednowymiarowe.* Gdybyśmy natomiast chcieli rozważyć rów-

nież punkty leżące tuż przy krawędzi, rachunek stałby się bez porównania zawilszy.

Całką najogólniejszą powyższego równania jest

$$\varphi = Ax + B,$$

gdzie A, B są stałe dowolne. Jeżeli dane są potencyały okładek φ_1, φ_2, mamy $B = \varphi_1$, $A = (\varphi_2 - \varphi_1)/l$, a więc

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l} x. \tag{230}$$

Siła elektryczna jest normalna do okładek, a natężenie jej

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} \tag{231}$$

jest jednakowe dla wszystkich rozważanych punktów między okładkami, czyli: mamy tu tak zwane pole *jednostajne*. Jeżeli $\varphi_1 > \varphi_2$, linie siły biegną od okładki 1 do 2 jako pęczek prostych równoległych (tuż przy krawędzi dopiero linie te zaczęłyby wyginać się na zewnątrz); powierzchnie izopotencyalne są płaszczyznami równoległemi do okładek. Gęstość ładunku prawdziwego na okładce 1 jest

$$\eta_1 = D = KE = \frac{K(\varphi_1 - \varphi_2)}{l},$$

na okładce 2 zaś $\eta_2 = -\eta_1$. Ładunki całkowite są więc

$$e_1 = e = -e_2 = KE.S, \tag{232}$$

gdzie S jest powierzchnią każdej okładki. Liczba wszystkich komórek jednostkowych, zawartych między okładkami, w przestrzeni walcowatej o objętości $V = Sl$ jest (przy zaniechaniu komplikacyj krawędziowych, jak wyżej):

$$N = SE(\varphi_1 - \varphi_2) = V.E^2,$$

energia zawarta w tejże przestrzeni, według (231)

$$U = \tfrac{1}{2} KE^2.V = \tfrac{1}{2} \frac{KS}{l} (\varphi_1 - \varphi_2)^2. \tag{233}$$

Dla *pojemności* kondensatora wynika z (232) i (231)

$$C = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2} = K \frac{S}{l}, \tag{234}$$

a znany ten wzór czytelnik sam wyrazi słowami.

Energię elektryczną kondensatora możemy więc wyrazić również bądź to przez wzór

$$U_{(e)} = \tfrac{1}{2} e^2/C = \tfrac{1}{2} \frac{l}{KS} e^2 \qquad (233a)$$

bądź też przez

$$U_{(\varphi)} = \tfrac{1}{2} C(\varphi_1 - \varphi_2)^2. \qquad (233b)$$

Przy danych K, S „spółczynnik“ C^{-1}, względnie C, jedyny, do którego redukują się w tym wypadku spółczynniki a_{ik}, względnie b_{ik}, zależy tylko od wzajemnej odległości okładek l. Według wywodów ogólnych § 75 otrzymamy przeto dla siły ponderomotorycznej L starającej się zwiększyć odległość l, przy *stałych ładunkach*, $L = -\frac{\partial U_{(e)}}{\partial l} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{KS}$, t. j. dla siły starającej się *zbliżyć* jedną okładkę do drugiej:

$$-L = \tfrac{1}{2} \frac{e^2}{KS}, \qquad (235a)$$

a wyraz ten jest identyczny z wyrazem $\frac{1}{2} KE^2.S$ wynikającym bezpośrednio przez zastosowanie wysiłu Maxwellowskiego, czyli napięcia wzdłuż rurek elektrycznych.

Gdyby natomiast okładki kondensatora były połączone metalicznie z biegunami elementu galwanicznego, o stałej sile elektrobodźczej $\varphi_1 - \varphi_2$, t. j. przy *stałych potencyałach*, otrzymalibyśmy dla siły ponderomotorycznej, czyli dla siły wzajemnego „przyciągania się“ okładek, według § 76, (225): $-L = -\frac{\partial U_{(\varphi)}}{\partial l}$, t. j. według (233b):

$$-L = \tfrac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \frac{KS}{l^2}. \qquad (235b)$$

Siła ta więc, która przy stałych ładunkach była niezależną od l, jest przy stałych potencyałach, lub ogólniej przy stałej różnicy potencyałów okładek, odwrotnie proporcyonalna do kwadratu ich odległości. W drugim wypadku, przy zbliżaniu się okładek, t. j. podczas gdy kondensator pracuje mechanicznie, elektryczna energia jego wzmaga się bardzo szybko (gęstość zaś energii jeszcze szybciej), a wszystko to dzieje się kosztem zasiłków czerpanych (np.) z ogniwa elektrochemicznego.

Pojemność kondensatora jest, jak widzieliśmy, *caeteris paribus*, wprost proporcyonalna do spółczynnika dielektrycznego warstwy izolującej; odzwierciedla się to dobrze w nazwie „pojemności właściwej“ (indukcyjnej, elektrostatycznej) nadanej spółczynnikowi temu pierwotnie przez Faradaya.

Ze wzoru (235a) widzimy wreszcie, że przy stałych, danych ładunkach (prawdziwych) okładki przyciągają się, lub zachowują się

tak jak gdyby się przyciągały, ze siłą odwrotnie proporcyonalną do spółczynnika K. Własność ta zresztą, jak widzieliśmy poprzednio, przysługuje każdej w ogóle parze cząstek elektryczności prawdziwej.

Przy danych potencyałach natomiast siła ta jest, *caeteris paribus*, wprost proporcyonalna do K.

§ 80. ***Kule spółśrodkowe.*** — Niechaj O będzie wspólnym środkiem dwóch powierzchni kulistych o promieniach R_1 i $R_2 > R_1$; pierwsza z nich niechaj będzie powierzchnią zewnętrzną jednego przewodnika, druga—powierzchnią wewnętrzną drugiego przewodnika. Między jedną a drugą powierzchnią niechaj znajduje się dielektryk o spółczynniku K. Przebiegające w nim linie elektryczne, normalne do jednej i drugiej kuli, będą się zlewały z promieniami wyprowadzonemi ze środka O. Całe pole będzie symetryczne naokoło tego punktu. Oznaczając tedy przez r ($R_2 \geq r \geq R_1$) odległość dowolnego punktu od środka kul, uczynimy zadość warunkom zadania, skoro założymy, że potencyał φ zależy jedynie od r; i w tym więc wypadku zagadnienie jest *jednowymiarowe*, tylko że zmienna niezależna ma teraz inne znaczenie geometryczne niż w poprzedzającym.

Zakładając $\varphi = \varphi(r)$, mamy przedewszystkiem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{x}{r}, \text{ i t. d.,}$$

a więc

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{d\varphi}{dr}\mathbf{r} \tag{236}$$

gdzie $\mathbf{r}$ jest wektorem *jednostkowym* radyalnym, wskazującym w kierunku rosnących r; siła elektryczna jest tedy wszędzie radyalna, a więc też normalna do przewodników kulistych, jak być powinno; natężenie zaś jej jest $E = -\frac{d\varphi}{dr}$.

Następnie zaś mamy $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$ i analogiczne wyrazy dla drugich pochodnych potencyału względem y, z, a więc przez dodanie

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} = 0, \text{ czyli } \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(\varphi r) = 0;$$

mamy przeto:

$$\frac{d^2(\varphi r)}{dr^2} = 0, \tag{237}$$

t. j. dla φr zupełnie to samo równanie co dla φ w poprzednim przykładzie.

Rozumiejąc więc znowu przez A, B dwie stałe dowolne, mamy

$$\varphi = \frac{A}{r} + B; \tag{238}$$

wyrażając stałe przez potencyały φ_1, φ_2 kul R_1, R_2, mamy

$$\varphi = \frac{R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2}{R_1 - R_2} + \frac{1}{r}\frac{R_1R_2(\varphi_1 - \varphi_2)}{R_1 - R_2}. \tag{239}$$

Dla natężenia siły elektrycznej wynika stąd

$$E = \frac{R_1R_2}{r^2}\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2 - R_1}. \tag{240}$$

Ładunek kuli mniejszej, t. j. R_1, jest

$$e_1 = e = 4\pi K R_1R_2\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2 - R_1}; \tag{241}$$

dla drugiej kuli jest, jak łatwo się przekonać, $e_2 = -e$. Dzieląc (241) przez $\varphi_1 - \varphi_2$, otrzymamy pojemność *kondensatora kulistego:*

$$C = 4\pi K\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}. \tag{242}$$

Wszystkie inne zresztą rozważania, analogiczne do tych, które dotyczyły poprzedniego przykładu, czytelnik sam przeprowadzi.

Jeżeli w nieograniczonym dielektryku znajduje się *jedyny* przewodnik kulisty o promieniu R, otrzymamy wszystkie dotyczące wzory, kładąc w powyższych $R_2 = \infty$. Krótszą jednak drogą możemy je otrzymać wprost z (238). Skoro bowiem dla $r = \infty$ ma być $\varphi = 0$, jak tego zawsze wymagamy, stała B musi być równa zeru, a więc $\varphi = Ar^{-1}$. Oznaczając tym razem rotencyał samego przewodnika przez a, mamy $A = aR$, a więc

---

* Widzieliśmy już zresztą we Wstępie (str. 69), że po wyłączeniu punktu $r = 0$ jest $\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0$, a więc też $\nabla^2(\frac{A}{r} + B) = 0$.

$$\varphi = a\frac{R}{r},$$

stąd zaś $E = aRr^{-2}$, $\eta = aR^{-1}$, $e = 4\pi K.Ra$, a więc też

$$\varphi = \frac{e}{4\pi K}\frac{1}{r}, \quad E = \frac{e}{K4\pi r^2}, \tag{243}$$

t. j. pole, przy danym ładunku, niezależne od promienia kuli i takie jak gdyby cały ładunek był skoncentrowany w środku kuli. Dzieląc e przez a, otrzymamy pojemność kuli

$$C = 4\pi KR. \tag{244}$$

Energia elektryczna całego pola otaczającego kulę będzie

$$U = \tfrac{1}{2}e^2C^{-1} = \frac{1}{8\pi K}\frac{e^2}{R}, \tag{245}$$

a więc przy danym ładunku odwrotnie proporcyonalna do promienia kuli.

§ 81. ***Walce kołowe spółosiowe.*** — Jeżeli walce takie są bardzo długie w porównaniu z różnicą ich promieni czyli z grubością warstwy dielektrycznej i jeżeli ograniczymy się do rozważania punktów niezbyt bliskich brzegów każdego walca (czyli, w języku matematycznym, jeżeli walce są obustronnie nieskończenie długie), potencyał φ będzie zależał tylko od odległości punktu od wspólnej osi walców. Oznaczając odległość tę przez ρ i kładąc płaszczyznę x, y normalnie do osi, będziemy mieli $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\varphi = \varphi(\rho)$ a więc

$$E = -\frac{d\varphi}{d\rho}, \tag{246}$$

kierunek zaś siły elektrycznej będzie normalny do osi, a więc też do powierzchni przewodników walcowych. Przekształcone równanie Laplace'a i tym razem jest bardzo proste. Mamy bowiem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{d\rho}\frac{x}{\rho}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2\varphi}{d\rho^2}\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho}\left(1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right), \text{ i podobnie}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{d^2\varphi}{d\rho^2}\left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho}\left(1 - \frac{y^2}{\rho^2}\right);$$

ponieważ zaś φ od z nie zależy, przeto równanie to przybierze postać

$$(247) \qquad \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho} = 0, \text{ czyli } \frac{d}{d\rho}\left[lg\left(\rho\frac{d\varphi}{d\rho}\right)\right] = 0;$$

będzie więc

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{A}{\rho},$$

gdzie A jest stałą dowolną, następnie zaś

$$\varphi = Alg\rho + B, \qquad (248)$$

gdzie B jest drugą stałą dowolną. Natężenie E, które w poprzednim przykładzie było odwrotnie proporcyonalne do kwadratu odległości od środka kul, będzie tym razem odwrotnie proporcyonalne do pierwszej potęgi odległości od osi walców. Wyrażenie stałych A, B przez potencyały φ_1, φ_2 przewodników walcowych o danych promieniach przekrojów ρ_1 i $\rho_2 > \rho_1$ i wyprowadzenie wszelkich dalszych wzorów na drodze podobnej jak w poprzednich przykładach pozostawiam czytelnikowi. Między innemi znajdzie on łatwo, że *pojemność* części tego układu przewodników, zawartej między dwoma przekrojami poprzecznemi, odległemi od siebie o l jednostek długości, wynosi

$$C = \frac{2\pi Kl}{lg\rho_2 - lg\rho_1}, \qquad (249)$$

że więc zależy jedynie od stosunku promieni $\rho_2 : \rho_1$.

Dla $\rho_2 = \infty$ czyli w wypadku jedynego tylko walca, całka w postaci (248) traci swą stosowalność, skoro nie odstąpimy od wymagania, aby dla $\rho = \infty$ potencyał znikał. Podobna zresztą uwaga dotyczy *jednej* płaszczyzny.

Powyżej przyjętym warunkom dla dwóch walców odpowiada dość dobrze butelka lejdejska, której pojemność zasadniczo można obliczyć według (249); szkło bowiem w przyrządach takich bywa dość cienkie w porównaniu z wysokością okładek.

§ 82. ***Równanie Laplace'a w spółrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych.*** — Każdy z powyższych trzech wypadków stanowił bezpośrednio zagadnienie jednowymiarowe. W wielu innych zagadnieniach, które dotyczą przewodników o zawilszych kształtach geometrycznych, można *uczynić* potencyał zależnym od jednej wielkości, a mianowicie przez odpowiedni wybór zmiennych niezależnych, czyli spółrzędnych w ogólniejszem znaczeniu słowa, i przez wprowadzenie ich do ogólnego równania Laplace'a. W pierwszym przykładzie x było najodpowiedniejszą zmienną, albowiem przybierało wartość stałą na każdej z płaszczyzn, w drugim przykładzie tę samą wła-

sność posiadało r względem powierzchni kulistych spółśrodkowych, w trzecim ρ względem walców spółosiowych. Dzięki temu przystosowanie całki φ do warunków granicznych, t. j. wyznaczenie stałych dowolnych A, B, było pozbawione wszelkich trudności.

Jeżeli chodzi np. o dwa elipsoidy spółogniskowe, należy wyrazić operator ∇^2 w terminach *takich* zmiennych, aby jedna z nich przybierała wartość stałą zarówno na jednym jak i na drugim elipsoidzie; wówczas odpowiednia całka da się łatwo do tych powierzchni przystosować; zobaczymy nawet, że całka ta jest zupełnie taka sama jak dla kondensatora płaskiego, tylko że zmienna ma w tym wypadku inne znowu znaczenie geometryczne. Przykłady te wystarczą do zrozumienia, jak ważną może być znajomość jaknajwiększej liczby kształtów operatora Laplace'a.

Ograniczymy się tu do wyrażenia ∇^2 w spółrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych, lecz zresztą dowolnych. (Wprowadzenie skośnokątnych nie jest wprawdzie zasadniczo trudniejsze, ortogonalne jednak są ze względu na zastosowania do omawianych zagadnień najważniejsze.) Jako przykład rozważymy następnie t. zw. spółrzędne eliptyczne, a w szczególności też zwykłe biegunowe i cylindryczne.

„Przekształcenia", o jakich mowa, wykonywa się zwykle przez zestawienie spółrzędnych krzywoliniowych z prostoliniowemi x, y, z i przez zastosowanie pewnej postaci twierdzenia Greena. Rachunki dotyczące, nie bacząc na ich doniosłe skrócenie dzięki użyciu twierdzenia Greena, są jednak dość długie jeszcze i nieprzejrzyste*. Możemy atoli otrzymać żądany wyraz ∇^2 w spółrzędnych krzywoliniowych, nie uciekając się zgoła do żadnych innych spółrzędnych; a licuje to lepiej z metodą wektorową, którą w miarę możności starałem się w całej tej książce bezpośrednio stosować. Operator Laplace'a był pierwotnie określony przez $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, aczkolwiek dawno już wiedziano, że jest on niezależny od wyboru spółrzędnych. Według zasadniczych określeń analizy wektorów [p. *Wstęp*, wzory (82) i (111)] jest on atoli od początku iteracyą skalarną operatora $\nabla = \nu \frac{\partial}{\partial \nu}$ t. j. $\nabla^2\varphi = \nabla\nabla\varphi$ lub też $\nabla^2\varphi = div\,\nabla\varphi$, a więc nie opiera się na żadnych spółrzędnych. Z tego

---

* Por. np. *Kirchhoffa* Mechanikę, Wykład XVII, lub *H. Webera: Part. Diffgleichungen d. math. Physik.* Tom I, § 41 (1900) lub też klasyczne dzieło *Lamé'go*, twórcy teoryi takich spółrzędnych: *Leçons sur le coordonnées curvilignes*, Paryż, 1859. H. Weber, w cytowanem dopiero co dziele (§ 90) wyraża wprawdzie operatory *curl* i *div* w spółrzędnych krzywoliniowych, nie uciekając się do x, y, z, nie czyni tego jednak dla operatora ∇^2, chociaż byłoby to również proste.

punktu widzenia nie powinniśmy właściwie mówić o „przekształceniu“ operatora Laplace'a, lecz o wyrażeniu go w tych lub owych spółrzędnych, prosto- lub krzywoliniowych.

Po tych, przydługich może, uwagach przejdźmy do rzeczy.

Niechaj u, v, w będą dowolnemi spółrzędnemi krzywoliniowemi, ortogonalnemi. Innemi słowy: niechaj $u = \text{const.}$ będzie układem ∞^1 dowolnie ukształtowanych powierzchni*, $v = \text{const.}$ drugim układem powierzchni normalnych do pierwszych i wreszcie $w = \text{const.}$ trzecim układem powierzchni, przecinających normalnie wszystkie powierzchnie pierwszego i drugiego układu. Dla krótkosci można jednę z tych powierzchni nazywać „powierzchnią u“, względnie „powierzchnią v“ lub w.

Niechaj $\mathfrak{p}$ będzie wektorem jednostkowym normalnym do powierzchni u, w danym punkcie, i wskazującym w kierunku *rosnących* wartości u. Podobne znaczenie niechaj mają wektory jednostkowe $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ względem powierzchni v, w. Ze względu na normalność układu będzie przedewszystkiem $\mathfrak{pq} = \mathfrak{qr} = \mathfrak{rp} = 0$. Układ $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ niechaj zresztą będzie *prawoskrętnym*, t. j. takim, iż $\mathfrak{p} = V\mathfrak{qr}$, $\mathfrak{q} = V\mathfrak{rp}$, $\mathfrak{r} = V\mathfrak{pq}$; konwencya ta jest zresztą obojętna dla obecnych naszych celów; dopiero gdy chodzić będzie o wyrażenie operatora *curl* w terminach u, v, w, znajdzie ona swe uwzględnienie. Zbytecznem jest chyba rozwodzić się nad tem, że kierunki wektorów $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ zmieniają się w ogóle od punktu do punktu; wyjątkowo tylko są one jednakowe w całej przestrzeni, a mianowicie gdy powierzchnie odpowiedniego układu stają się płaszczyznami; przy użyciu zwykłych spółrzędnych prostoliniowych zachodzi to dla wszystkich trzech wektorów jednostkowych, w całej przestrzeni euklidesowej.

Oznaczmy przez ds_1, ds_2, ds_3 elementy długości mierzone wzdłuż $\mathfrak{p}$, względnie $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$. Wówczas będzie, według (82) *(Wstęp)*:

$$\nabla u = \mathfrak{p}\frac{\partial u}{\partial s_1}, \quad \nabla v = \mathfrak{q}\frac{\partial v}{\partial s_2}, \quad \nabla w = \mathfrak{r}\frac{\partial w}{\partial s_3}; \tag{250}$$

u, v, w są bowiem *skalarnemi* funkcyami położenia.

Jeżeli φ jest dowolną funkcyą skalarną położenia w przestrzeni, którą pragniemy uważać jako funkcyę zmiennych niezależnych u, v, w, otrzymamy

$$\nabla\varphi = \mathfrak{p}\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} + \mathfrak{q}\frac{\partial\varphi}{\partial s_2} + \mathfrak{r}\frac{\partial\varphi}{\partial s_3} =$$

---

* Byle tylko nieprzerwanych i posiadających naogół w każdym punkcie określoną normalną; to samo zakładamy o powierzchniach $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$ Punkty osobliwe, jak np. wierzchołek stożka, powinny być szczególnie uwzględniane.

$$\mathfrak{p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial s_1}+\mathfrak{q}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial s_2}+\mathfrak{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial s_3},$$

albowiem przy posuwaniu się w kierunku $\mathfrak{p}$ wielkości v, w nie doznają zmiany, t. j. $\frac{\partial v}{\partial s_1}=\frac{\partial w}{\partial s_1}=0$, i podobnie też $\frac{\partial u}{\partial s_2}=0$ i tak dalej*. Według (250) możemy zamiast ostatniego równania napisać:

$$(251)\qquad \nabla\varphi=\nabla u.\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\nabla v.\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\nabla w.\frac{\partial\varphi}{\partial w},$$

lub też

$$(251)\qquad \nabla\varphi=(\mathfrak{p}U\frac{\partial}{\partial u}+\mathfrak{q}V\frac{\partial}{\partial v}+\mathfrak{r}W\frac{\partial}{\partial w})\varphi,$$

gdzie przez U, V, W oznaczyłem *natężenia* wektorów ∇u, ∇v, ∇w, a więc, według (250):

$$(252)\qquad U=\frac{\partial u}{\partial s_1},\ V=\frac{\partial v}{\partial s_2},\ W=\frac{\partial w}{\partial s_3}.\ **$$

Ponieważ więc U, jako szybkość przyrastania u przy posuwaniu się w kierunku $\mathfrak{p}$, jest od wyboru jakichkolwiek pomocniczych spółrzędnych zgoła niezależna, i ponieważ to samo dotyczy V, W, przeto mamy już w (251) wyraz $\nabla\varphi$ w żądanych spółrzędnych krzywoliniowych, ortogonalnych. Wielkości skalarne U, V, W należy sobie pomyśleć jako dane funkcye samych u, v, w.

Stąd zaś możemy otrzymać $\nabla^2\varphi$, najłatwiej jeżeli napiszemy $\nabla^2\varphi=div\,\nabla\varphi$ i przypomnimy sobie ze *Wstępu* pierwotne określenie rozbieżności (str. 30). Niechaj mianowicie $d\tau$ będzie elementem objętości zawartym między sześcioma powierzchniami u, $u+du$, v, $v+dv$, w, $w+dw$. Element ten będzie prostopadłościanem, tak iż $d\tau=ds_1ds_2ds_3$. Według (252) możemy napisać

---

* Zachodzi to dzięki *normalności* układu; dla spółrzędnych *skośnokątnych* pochodne te nie znikałyby.

** W spółrzędnych x, y, z, mielibyśmy $U^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2$ i podobne wyrazy dla V^2, W^2. Warunek zaś normalności t. j. $(\nabla u)(\nabla v)=0$ i tak dalej, wyraziłby się przez równanie

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}=0$$ i dwa inne podobne.

$$ds_1 = \frac{du}{U},\ ds_2 = \frac{dv}{V},\ ds_3 = \frac{dw}{W};\ d\tau = \frac{dudvdw}{UVW}. \quad (253)$$

Oznaczając tedy składowe dowolnego wektora $\mathbf{R}$ w kierunkach $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ przez R_1, R_2, R_3 i tworząc jego całkę powierzchniową czyli indukcyę (zwróconą nazewnątrz $d\tau$) przez ścianę stanowiącą część powierzchni u i przez ścianę przeciwległą, stanowiącą część powierzchni $u + du$, otrzymamy

$$-R_1 \frac{dvdw}{VW} + [\frac{R_1}{VW} + \frac{\partial}{\partial u}(\frac{R_1}{VW})du]\,dvdw = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{R_1}{VW})\,dudvdw;$$

dwa podobne wyrazy otrzymamy dla pozostałych dwóch par ścian; ponieważ zaś $div\,\mathbf{R}\,d\tau$ nie jest niczem innem jak indukcyą całkowitą, czyli sumą tych trzech wyrazów, przeto, dzieląc obustronnie przez $d\tau$ i uwzględniając ostatni z wzorów (253), będziemy mieli:

$$div\,\mathbf{R} = UVW[\frac{\partial}{\partial u}(\frac{R_1}{VW}) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{R_2}{WU}) + \frac{\partial}{\partial w}(\frac{R_3}{UV})], \quad (254)$$

jako wyraz rozbieżności dowolnego wektora w terminach spółrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych.

Stosując zaś wzór ten do wektora $\mathbf{R} = \nabla\varphi$, t. j. kładąc według (251) $R_1 = U\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $R_2 = V\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $R_3 = W\frac{\partial\varphi}{\partial w}$, otrzymamy bezpośrednio $div\nabla\varphi$ czyli $\nabla^2\varphi$ w żądanej postaci:

$$\nabla^2\varphi = UVW[\frac{\partial}{\partial u}(\frac{U}{VW}\frac{\partial\varphi}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{V}{WU}\frac{\partial\varphi}{\partial v}) + \frac{\partial}{\partial w}(\frac{W}{UV}\frac{\partial\varphi}{\partial w})]. \quad (255)$$

Oznaczając zresztą iloczyn UVW przez Q, możemy napisać nieco krócej:

$$\nabla^2\varphi = Q[\frac{\partial}{\partial u}(\frac{U^2}{Q}\frac{\partial\varphi}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{V^2}{Q}\frac{\partial\varphi}{\partial v}) + \frac{\partial}{\partial w}(\frac{W^2}{Q}\frac{\partial\varphi}{\partial w})]. \quad (255)$$

Równanie Laplace'a w spółrzędnych ortogonalnych przybierze więc kształt

$$\frac{\partial}{\partial u}(\frac{U^2}{Q}\frac{\partial\varphi}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{V^2}{Q}\frac{\partial\varphi}{\partial v}) + \frac{\partial}{\partial w}(\frac{W^2}{Q}\frac{\partial\varphi}{\partial w}) = 0, \quad (256)$$

jednocześnie zaś siła elektryczna wyrazi się, według (251), przez

$$\mathbf{E} = -(\mathfrak{p}U\frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{q}V\frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{r}W\frac{\partial}{\partial w})\varphi. \quad (257)$$

Przy konkretnym wyborze układu spółrzędnych krzywoliniowych należy U, V, W, a więc też Q, uważać jako znane funkcye zmiennych niezależnych u, v, w. Równanie Laplace'a jest więc równaniem różniczkowem cząstkowem, liniowem, drugiego rzędu, o spółczynnikach w ogóle zmiennych od punktu do punktu.

Rozważymy teraz przykłady takich spółrzędnych ortogonalnych, najbardziej znane co do teoryi i zastosowań.

§ 83. *Spółrzędne eliptyczne.* — Jeżeli powierzchnie $u = \text{const.}$ są elipsoidami spółogniskowemi (w ogóle trójosiowemi), $v = \text{const.}$ hyperboloidami jednopowłokowemi, $w = \text{const.}$ hyperboloidami dwupowłokowemi, o tychże ogniskach, mamy potrójny układ ortogonalny znany z geometryi analitycznej pod nazwą układu *kwadryk spółogniskowych*. Spółrzędne u, v, w nazywają się wówczas krótko *eliptycznemi*.

W tym wypadku mamy *

$$(258)\quad \begin{cases} U^2 = \dfrac{f(u)}{(u-v)(u-w)}, \quad V^2 = \dfrac{f(v)}{(v-w)(v-u)}, \\ W^2 = \dfrac{f(w)}{(w-u)(w-v)}, \\ \text{gdzie} \quad f(x) = 4(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x) \end{cases}$$

i gdzie a^2, b^2, c^2 są wielkościami dodatniemi *stałemi* dla całego układu, t. j. dla całej przestrzeni; $a^2 > b^2 > c^2$. Znaczenie ich geometryczne jest dane przez to, że $\sqrt{(a^2-b^2)}$, $\sqrt{(a^2-c^2)}$, $\sqrt{(b^2-c^2)}$ są odległościami ognisk przekrojów głównych od środka całego układu; ogniska te zaś są wspólne wszystkim powierzchniom; $2a$, $2b$, $2c$ są długościami osi głównych elipsoidu $u = 0$. **

Pisząc znowu $Q = UVW$, otrzymamy według (258):

$$(259)\quad \frac{U^2}{Q} = (v-w)\sqrt{\frac{-f(u)}{f(v)\,f(w)}}$$

---

* Oprócz dzieł specyalnie geometrycznych porówn. np. *Kirchhoffa* Mechanikę, § 2 Wykł. XVII, lub cytowane wyżej dzieło *H. Webera*, T. I. § 43.

** u, v, w są pierwiastkami równania $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} + \dfrac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$, gdzie x, y, z są zwykłemi spółrzędnemi prostoliniowemi, mierzonemi wzdłuż osi głównych powyższych powierzchni.

i dwa analogiczne wyrazy dla V^2/Q, W^2/Q. Ponieważ zresztą dla wszystkich (rzeczywistych) punktów przestrzeni jest, przy powyższem podporządkowaniu wielkości u, v, w poszczególnym rodzajom powierzchni:

$$u > v > w,$$

a mianowicie

$$\infty > u > -c^2; \quad -c^2 > v > -b^2; \quad -b^2 > w > a^2, \tag{260}$$

przeto $f(u)$ i $f(w)$ są zawsze *dodatnie*, $f(v)$ natomiast jest *ujemne*, tak iż pierwiastek w (259) jest rzeczywisty, jak być powinno.

W wyrazie (259) jedynie tylko $f(u)$ zależy od u; dzięki temu mamy więc

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U^2}{Q}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = \frac{v-w}{\sqrt{-f(v)f(w)}}\frac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{f(u)}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right]$$

i dwa podobne wyrazy dla pochodnych względem v, w. Wprowadzając tedy nowe zmienne niezależne α, β, γ, z których pierwsza zależy tylko od u, druga tylko od v, trzecia tylko od w, a mianowicie takie iż $\frac{\partial \varphi}{\partial u}\sqrt{f(u)} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, i t. d., to jest

$$\alpha = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}}, \quad \beta = \int \frac{dv}{\sqrt{-f(v)}}, \quad \gamma = \int \frac{dw}{\sqrt{f(w)}}, \tag{261}$$

otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U^2}{Q}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = \frac{v-w}{\sqrt{-f(u)f(v)f(w)}}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}$$

i dwa inne podobne wyrazy, tylko że w drugim będzie $-(w-u)$, nie zaś $+(w-u)$. Podstawiając wreszcie do (255), będziemy mieli żądany wyraz $\nabla^2\varphi$ *w współrzędnych eliptycznych:*

$$\nabla^2\varphi = \frac{(v-w)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + (u-w)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + (u-v)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma^2}}{(v-w)(u-w)(u-v)}. \tag{262}$$

Według (261) α, β, γ wyrażają się odpowiednio przez u, v, w za pomocą *całek eliptycznych*, mamy tam bowiem pod znakiem pierwiastka wyrazy 3-go stopnia; $f(u) = 4(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)$ i podobnie $f(v)$, $f(w)$. Całkom tym można nadać postać normalną

całek eliptycznych *pierwszego rodzaju.** Odwrotnie więc u, v, w będą *funkcyami eliptycznemi* zmiennych α, względnie β, γ i jako takie należy je sobie pomyśleć we wzorze (262). Zaleta zmiennych α, β, γ w porównaniu z u, v, w polega na tem, że uwalniają nas one od pierwszych pochodnych φ, pozostawiając tylko drugie [porówn. pierwotny wyraz (255)], dzięki czemu postać $\nabla^2\varphi$ upraszcza się znakomicie. Zauważmy wreszcie, że dzięki $u > v > w$ wszystkie spółczynniki w (262) są zasadniczo dodatnie.

Według (262) równanie Laplace'a przybiera kształt

$$(263) \qquad (v-w)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + (u-w)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} + (u-v)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2} = 0,$$

który nadaje się bezpośrednio do rozwiązania całego szeregu zadań elektrostatycznych dla przewodników o postaci elipsoidów i hyperboloidów jednego lub drugiego rodzaju. Rozważymy tu nieliczną tylko garstkę przykładów.

§ 84. *Elipsoidy spółogniskowe.* — Jeżeli potencyał φ zależy tylko od α, a więc tylko od u, wszystkie powierzchnie izopotencyalne będą się zlewały z powierzchniami elipsoidów spółogniskowych, tak iż liniami siły elektrycznej będą linie przecięcia jednych i drugich hyperboloidów, a więc linie *krzywiznowe* tych powierzchni.

Równanie Laplace'a redukuje się w tym wypadku do $\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = 0$, tak iż będzie

$$\varphi = A\alpha + B,$$

gdzie A, B są dowolne stałe. Jeżeli więc φ_1, φ_2 są potencyałami dwóch przewodników elipsoidalnych spółogniskowych określonych przez wartości $\alpha = \alpha_1 = \text{const.}$, $\alpha = \alpha_2 = \text{const.}$, mamy $\varphi_1 = A\alpha_1 + B$, $\varphi_2 = A\alpha_2 + B$, tak iż potencyał w dowolnym punkcie pola elektrycznego, zawartego między temi przewodnikami, będzie:

$$(264) \qquad \varphi = \frac{\alpha_1\varphi_2 - \alpha_2\varphi_1}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\alpha.$$

Natężenie siły elektrycznej w dowolnym punkcie pola będzie, według (257): $E = -U\frac{d\varphi}{du}$, a więc, według (264), (261) i (258):

---

* Odpowiednie wzory czytelnik znajdzie np. u *Maxwella, El. and Mgnt.*, T. I, Rozdz. X, lub w dziele *Lamé*'go (na którem opiera się Maxwell): *Leçons sur les fonctions inverses etc.;* Paryż, 1857. Powyższe α, β, γ odpowiadają Maxwellowskim γ, β, α; a, b, c mają tu zresztą inne znaczenia.

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)\sqrt{(u-v)(u-w)}}; \qquad (265)$$

E jest więc różne w różnych punktach jednej i tej samej powierzchni elipsoidalnej.

Niechaj półosie główne przewodnika 1, dla którego napisaliśmy $\alpha = \alpha_1$, będą a, b, c; wówczas odpowiednia wartość u będzie $u_1 = 0$ (§ 83); otrzymamy przeto dla *gęstości ładunku*, rozmieszczonego na tym przewodniku

$$\eta = K\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{(\alpha_2 - \alpha_1)\sqrt{vw}} \qquad (u = 0). \qquad (266)$$

Jeżeli dla drugiego przewodnika jest $u = u_2 > u_1$, t. j. $u_2 > 0$, przewodnik 2 będzie otaczał przewodnik 1. Ładunki dowolnych części drugiego przewodnika będą równe i wprost przeciwne ładunkom odpowiednich części pierwszego.

Można łatwo okazać, że iloczyn vw we wzorze (266) jest wprost proporcyonalny do $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$. Gęstość ładunku η będzie więc wprost proporcyonalna do długości prostopadłej spuszczonej ze środka elipsoidu na płaszczyznę styczną w danym jego punkcie, co stanowi treść znanego bardzo twierdzenia. Gęstość będzie tedy największą na końcach osi największej ($x = \pm a$), najmniejszą zaś na końcach osi najmniejszej ($z = \pm c$).

Dla $u_2 = \infty$ drugi, zewnętrzny elipsoid staje się nieskończenie wielkim, tak iż, kładąc jednocześnie $\varphi_2 = 0$, otrzymamy pole elektrostatyczne, otaczające *jedyny* przewodnik elipsoidalny. W tym wypadku mamy, według (265), dla wszelkich $u \geq 0$, t. j. dla całej przestrzeni zewnętrznej

$$E = \frac{\varphi_1}{(\alpha_2 - \alpha_1)\sqrt{(u-v)(u-w)}}, \qquad (267)$$

gdzie według (261) należy położyć (ze względu na $u_1 = 0$, $u_2 = \infty$):

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}. \qquad (268)$$

Całka ta posiada wartość skończoną, zależną jedynie od kształtu i rozmiarów elipsoidu. Dla gęstości ładunku otrzymamy

(269) $$\eta = K \frac{\varphi_1}{(\alpha_2 - \alpha_1)\sqrt{vw}}.$$

Dla $u = \text{const.} = \infty$ mamy kulę o promieniu $\sqrt{u}$. Ładunek całkowity e rozmieszczony na przewodniku elipsoidalnym otrzymamy tedy najłatwiej, biorąc indukcyę całkowitą przez tę kulę. Ponieważ v, w są zawsze skończone, a mianowicie zawarte w granicach (260), przeto (267) daje

$$E_{u=\infty} = \frac{\varphi_1}{(\alpha_2 - \alpha_1)\, u};$$

mnożąc więc poprostu przez powierzchnię owej kuli i przez spółczynnik dielektryczny, t. j. przez $4\pi u K$, otrzymamy

(270) $$e = \frac{4\pi K \varphi_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Pojemność elektrostatyczna elipsoidu będzie przeto

(271) $$C = \frac{4\pi K}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

gdzie wartość $\alpha_2 - \alpha_1$ jest określona przez całkę eliptyczną (268).

Zmienne α, β, γ określone przez (261) można, jak już wspomniałem, przedstawić w postaci całek eliptycznych *normalnych, pierwszego rodzaju.* Odpowiedni rachunek przeprowadzimy tu jedynie dla zmiennej α, aby w postaci tej wyrazić też stałą $\alpha_2 - \alpha_1$ występującą w powyższych wzorach.

Połóżmy mianowicie

$$+\sqrt{(c^2 + u)} = \xi,$$

a więc $a^2 + u = \xi^2 + a^2 - c^2$, $b^2 + u = \xi^2 + b^2 - c^2$, $du = 2\xi d\xi$; otrzymamy wówczas

(a) $$\frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 + a^2 - c^2)(\xi^2 + b^2 - c^2)}}$$

czyli, kładąc

(272) $$b^2 - c^2 = \varepsilon_1^2,\ a^2 - c^2 = \varepsilon_2^2,\ a^2 - b^2 = \varepsilon_3^2,\ n = \varepsilon_1/\varepsilon_2$$

i wprowadzając

$$\zeta = \frac{\xi}{\varepsilon_1}$$

jako zmienną niezależną:

$$\frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \frac{d\zeta}{\varepsilon_2\sqrt{(1+\zeta^2)(1+n^2\zeta^2)}}.$$

Otóż, różniczkę tę możemy przekształcić natychmiast według klasycznej tablicy redukcyjnej *Legendre'a* *; kładąc mianowicie

$$\zeta = tg\psi,$$

otrzymamy żądaną postać:

$$\frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \qquad (273)$$

gdzie moduł k jest określony przez $k^2 = 1 - n^2$, a więc, według (272), przez

$$k = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}. \qquad (274)$$

Zauważmy, że ε_1, ε_2, ε_3, są odległościami ognisk przekrojów głównych od środka całego układu.

Według (261) otrzymamy tedy zmienną α w postaci normalnej całki eliptycznej

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon_2}\int^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

gdzie wybór dolnej granicy jest sprawą obojętną; możemy wziąć dla niej np. skrajną wartość $u = -c^2$, a więc $\xi = 0$, $\zeta = 0$, t. j. $\psi = 0$; wówczas będziemy mieli, przy zwykłym sposobie oznaczania:

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon_2}F(k,\psi). \qquad (275)$$

Gdy u rośnie od $-c^2$ do $+\infty$, kąt ψ rośnie od 0 do $\frac{1}{2}\pi$.

W zastosowaniach chodzi o różnicę dwóch wartości α odpowiadających danym u_1, u_2, a więc odpowiednim ψ_1, ψ_2, tak iż, bez względu na ten lub ów wybór dolnej granicy powyższej całki eliptycznej, mamy

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon_2}[F(k,\psi_2) - F(k,\psi_1)].$$

---

* Patrz *Ennepera Elliptische Funktionen.*

Jeżeli w nieskończenie rozległym dielektryku znajduje się *jedyny* przewodnik elipsoidalny, mamy $u_1 = 0$. $u_2 = \infty$, t. j. $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\xi_1 = c$, $\zeta_1 = \frac{c}{\varepsilon_1}$; pojemność elektrostatyczna C tego przewodnika będzie więc, według (271), określona przez wzór

$$\frac{1}{C} = \frac{F(k) - F(k, \psi_1)}{4\pi K \varepsilon_2}, \quad \psi_1 = arctg\left(\frac{c}{\varepsilon_1}\right), \tag{271a}$$

gdzie $F(k)$ jest krótkim symbolem dla $F(k, \frac{\pi}{2})$ czyli dla całki eliptycznej *zupełnej*.

Jeżeli $a = b = c = R$, t. j. jeżeli elipsoid staje się *kulą*, najprościej jest wrócić do pierwotnego u lub ξ. Istotnie, wówczas mamy według (a)

$$\frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \frac{d\xi}{\xi^2} = -d\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

a więc

$$\alpha = -\frac{1}{\xi} + const.; \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{R},$$

tak iż $C = 4\pi KR$, jak być powinno (§ 80).

Tarcza eliptyczna. — Jeżeli $u_1 = -c^2$, elipsoid staje się nieskończenie cienką płytą czyli tarczą eliptyczną w płaszczyźnie xy; półosie główne ograniczającej ją krawędzi eliptycznej są $A = \sqrt{a^2 - c^2} = \varepsilon_2$, $B = \sqrt{b^2 - c^2} = \varepsilon_1$. W tym wypadku mamy $\psi_1 = 0$, $F(k, \psi_1) = 0$. Jeżeli tarcza taka* jest jedynym przewodnikiem, znajdującym się w polu elektrostatycznem, mamy znowu $u_2 = \infty$, $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$, $F(k, \psi_2) = F(k)$, a więc

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon_2} F(k) = \frac{1}{A} F(k).$$

Gęstość ładunku, na jednej lub drugiej stronie tarczy, będzie przeto według (265)

$$\eta = \frac{K\varphi_1}{F(k)} \frac{A}{\sqrt{(v + c^2)(w + c^2)}}, \tag{276}$$

---

* Aby ta była fizycznie rzeczywistą, wystarcza założyć, że u_1 jest nieco większe od $-c^2$; otrzymamy wówczas spłaszczony bardzo elipsoid.

ładunek całkowity (po jednej i drugiej stronie), według (270)

$$e = \frac{4\pi K \varphi_1 A}{F(k)} \quad , \tag{277}$$

a więc pojemność elektrostatyczna tarczy eliptycznej:

$$C = \frac{4\pi K A}{F(k)} \quad , \tag{278}$$

gdzie $F(k)$ jest całką zupełną pierwszego rodzaju o module

$$k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} \quad ; \tag{279}$$

moduł ten jest więc równy *mimośrodowi (ekscentryczności)* tarczy eliptycznej. *

Według (277) możemy jeszcze napisać zamiast (276)

$$\eta = \frac{e}{4\pi\sqrt{(v + c^2)\,(w + c^2)}} \quad . \tag{280}$$

W spółrzędnych x, y, mierzonych wzdłuż osi głównych tarczy, mamy

$$vw + a^2(v + w) + a^4 = (a^2 - b^2)x^2 \quad **$$
$$-vw - b^2(v + w) - b^4 = (a^2 - b^2)y^2 \quad ,$$

a więc

$$(v + c^2)\,(w + c^2) = c^4 - c^2(a^2 + b^2) + a^2b^2 - (b^2 - c^2)x^2 - (a^2 - c^2)y^2$$
$$= A^2B^2\left[1 - \left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}\right)\right] \quad ,$$

tak iż (280) przybiera postać

$$\eta = \frac{e}{4\pi AB\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}\right)}} \quad . \tag{280a}$$

---

* Wartości $Log F(k)$ czytelnik znajdzie w „Tablicach matematyczno-fizycznych“ *Prof. A. Witkowskiego*, str. 80—81.

** Równania te otrzymamy wprost, kładąc $u = -c^2$ we wzorach ogólnych

$$x^2 = \frac{(a^2 + u)\,(a^2 + v)\,(a^2 + w)}{(a^2 - b^2)\,(a^2 - c^2)} \quad , \text{ i. t. d.,}$$

które czytelnik znajdzie np. w Mechanice Kirchhoffa, Wykł. XVII, § 2.

Gęstość ładunku jest więc najmniejsza w punktach środkowych tarczy (po jednej i drugiej stronie) i rośnie bezgranicznie, w miarę gdy zbliżamy się ku krawędzi; w samych punktach krawędzi jest $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$, a więc $\eta=\infty$; ładunek jednak całkowity, jak widzimy z (277), jest skończony, skoro tylko potencyał tarczy φ_1 posiada wartość skończoną. W rzeczywistości gęstość na krawędzi będzie tylko bardzo znaczna, lecz skończona; należy bowiem założyć, że tarcza posiada pewną, acz bardzo małą, grubość, czyli, że jest elipsoidem bardzo spłaszczonym odpowiadającym wartości u nieco większej niż $-c^2$.

Jeżeli $A=B=R$, mamy *krążek* płaski; kładąc $x^2+y^2=r^2$, otrzymamy

$$\eta=\frac{e}{4\pi R\sqrt{R^2-r^2}}. \tag{281}$$

Moduł k staje się w tym wypadku równym zeru, według (279); mamy przeto $F(k)=\int_0^{\pi/2}d\psi=\frac{1}{2}\pi$, tak iż pojemność elektrostatyczna krążka będzie, według (278):

$$C=8\pi KR. \tag{282}$$

§ 85. ***Hyperboloidy.*** — Jeżeli potencyał φ zależy tylko od β, a więc tylko od v, otrzymamy według (263): $\frac{d^2\varphi}{d\beta^2}=0$, tak iż φ będzie liniową funkcyą parametru β. Powierzchniami stałego potencyału będą w tym wypadku hyperboloidy spółogniskowe *jednopowłokowe*, a dwie jakiekolwiek z pośród tych powierzchni $\beta_1=$ const., $\beta_2=$ const. możemy uważać jako powierzchnie przewodników.

Podobnie też, zakładając, że φ zależy tylko od w czyli od γ, otrzymamy $\frac{d^2\varphi}{d\gamma^2}=0$, $\varphi=A\gamma+B$, a więc też rozwiązanie zadań elektrostatycznych dotyczących hyperboloidów *dwupowłokowych*.

Rachunki i rozumowania będą w zasadzie podobne do tych, które przeprowadziliśmy w § 84. Pozostawiamy je czytelnikowi, odsyłając go rzesztą, szczególniej co do wypadków granicznych, do I-go tomu Maxwella *(loc. cit.)*.

§ 86. $\nabla^2\varphi$ ***w spółrzędnych cylindrycznych.*** — Spółrzędne takie, a podobnie też spółrzędne biegunowe, które rozważymy w następnym paragrafie, stanowią szczególny przypadek spółrzędnych

eliptycznych omówionych w § 83. Możemy atoli otrzymać odpowiednie wyrazy $\nabla^2\varphi$ w sposób prostszy i bardziej przejrzysty, opierając się bezpośrednio na określeniu geometrycznem spółrzędnych cylindrycznych (i podobnie biegunowych).

Niechaj tedy z będzie długością mierzoną (od dowolnie obranego punktu początkowego O) wzdłuż *osi* układu spółrzędnych cylindrycznych, ρ odległością dowolnego punktu P od tej osi, ε kątem zawartym między płaszczyzną położoną przez P i przez oś układu a pewną dowolną płaszczyzną stałą położoną przez oś.

Wracając do oznaczeń § 82, napiszmy

$$u = z,\ v = \rho,\ w = \varepsilon,$$

tak iż wektory jednostkowe $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ będą wskazywały kierunki rosnących z, względnie rosnących ρ, zaś wektor $\mathfrak{r}$ będzie styczny do koła $\rho = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ i zwrócony w kierunku obiegu strzałek zegarowych, dla widza spoglądającego w kierunku rosnących z.

Elementy długości w tych trzech kierunkach wzajemnie prostopadłych będą wówczas:

$$ds_1 = dz,\ ds_2 = d\rho,\ ds_3 = \rho d\varepsilon;$$

według (252) otrzymamy przeto bezpośrednio:

$$U = 1,\ V = 1,\ W = \frac{1}{\rho}, \tag{283}$$

a więc, według (255):

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\right)\right]$$

czyli

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon^2}. \tag{284}$$

Nie chodzi nam tu zresztą o zastosowania do elektrostatyki; z wyrazu operatora ∇^2 w tych spółrzędnych cylindrycznych skorzystamy dopiero w jednym z dalszych rozdziałów, omawiając bieg fal elektromagnetycznych wzdłuż prostych drutów o przekroju kołowym.

Jeżeli φ zależy tylko od ρ, równanie Laplace'a będzie:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\varphi}{d\rho}\right) = 0,$$

tak iż otrzymamy $\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\text{const.}}{\rho}$, jak w § 81.

§ 87. *Spółrzędne biegunowe.* — Rozumiejąc przez r odległość dowolnego punktu P od punktu początkowego O, przez θ kąt zawarty między prostą OP i osią dodatnią układu, przez ε kąt zawarty między płaszczyzną południkową przechodzącą przez P i dowolną płaszczyzną południkową stałą, i pisząc

$$u = \theta, \quad v = \varepsilon, \quad w = r,$$

otrzymamy dla odpowiednich elementów długości

$$ds_1 = r d\theta, \quad ds_2 = r \sin\theta . d\varepsilon, \quad ds_3 = dr,$$

a więc, znowu według (252):

$$U = \frac{1}{r}, V = \frac{1}{r \sin\theta}, \quad W = 1. \tag{285}$$

Wektor $\mathfrak{r}$ będzie radyalny, wektor $\mathfrak{p}$ będzie styczny do koła południkowego, $\mathfrak{q}$ zaś do równoleżnika. Skoro wszystkie trzy wektory mają być zwrócone w kierunku *rosnących* r, względnie θ, ε, natenczas kąty ε dodatnie należy mierzyć od zachodu ku wschodowi, jeżeli oś dodatnia wskazuje na północ. Konwencye te będą zresztą niezbędne wówczas dopiero, gdy chodzić będzie o wyrażenie operatora *curl* w spółrzędnych biegunowych.

Podstawiając (285) we wzorze (255), § 82, ważnym dla dowolnych spółrzędnych krzywoliniowych normalnych, otrzymamy

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon^2}\right\} \tag{286}$$

czyli, rozwijając pierwsze dwa wyrazy i opuszczając funkcyę, na której mamy operować:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{cogt\,\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}. \tag{286'}$$

Oto jest znana w wielu gałęziach matematyki i fizyki postać operatora ∇^2 w spółrzędnych biegunowych.

Równanie więc Laplace'a w spółrzędnych tych można napisać krótko

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon^2} = 0 \tag{287}$$

lub też rozwinąć jak w (286').

Jeżeli φ zależy tylko od r, mamy $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\text{const.}}{r^2}$, a więc $\varphi = Ar^{-1} + B$, jak w § 80.

§ 88. *Funkcye kuliste.* — Jeżeli pewna funkcya φ czyni zadość równaniu Laplace'a, natenczas $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ również jest całką tego równania; mamy bowiem

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi = \nabla^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

Proces ten możemy powtórzyć dowolną liczbę razy, różniczkując daną całkę wielokrotnie, bądź to względem jednej i tej samej, bądź też względem różnych *osi*. Niechaj $h_1, h_2, \ldots h_n$ będą długościami mierzonemi wzdłuż dowolnych kierunków czyli „osi"; kierunki te w przestrzeni możemy wyznaczyć przez odpowiednie wektory jednostkowe $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots \mathbf{h}_n$; w języku wektorów możemy wówczas określić proces tak zwanego „różniczkowania osiowego", np. względem osi $\mathbf{h}_i$, przez wzór:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial h_i} = (\mathbf{h}_i \nabla)\varphi.$$

Przy wielokrotnem różniczkowaniu dogodniejszy jest symbol po lewej stronie; zamiast $(\mathbf{h}_1\nabla)\,[(\mathbf{h}_2\nabla)]\varphi$, naprzykład, napiszemy więc, według utartego zresztą zwyczaju: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial h_1 \partial h_2}$.

Niechaj r będzie odległością dowolnego punku przestrzeni p od pewnego punktu stałego O; wówcza, jak wiemy, $\frac{1}{r}$ czyni zadość równaniu Laplace'a w całej przestrzeni, z wyjątkiem samego tylko punktu O. Z tem samem zastrzeżeniem będzie więc całką tego równania funkcya

$$\varphi^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_n} \left(\frac{1}{r}\right), \qquad (288)$$

gdzie zamiast spółczynnika liczebnego $1/n!$ można oczywiście napisać dowolną stałą. Niektórzy autorowie, jak np. Maxwell*, nazywają ją, przy użyciu tego właśnie spółczynnika liczebnego, *funkcyą harmoniczną przestrzenną*, mianowicie $-(n+1)$ stopnia (ta-

* *El. and Mgnt.*, T. I. Rozdz. IX.

ką bowiem otrzymamy w niej potęgę zmiennej r, skoro wykonamy różniczkowania); nazwa ta zresztą jest mało używana.

Dla $n = 1$ mamy np.

$$\varphi^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial h_1}$$

czyli, oznaczając przez θ_1 kąt, jaki tworzy wektor ruchomy $\mathbf{r}$ * z osią stałą $\mathbf{h}_1$:

$$\varphi^{(1)} = \frac{1}{r^2}\mathbf{r}\mathbf{h}_1 = \frac{1}{r^2}\cos\theta_1. \tag{288a}$$

Podobnie też, różniczkując drugi raz względem osi $\mathbf{h}_2$, oznaczając kąt $\mathbf{r}$, $\mathbf{h}_2$ przez θ_2, zaś kąt zawarty między osiami $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ przez θ_{12}, i uwzględniając, że $\frac{\partial}{\partial h_2}\cos\theta_1 = \frac{1}{r}(\cos\theta_{12} - \cos\theta_1.\cos\theta_2)$, otrzymamy

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)} &= -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial h_2} = \frac{1}{r^3}\left[\tfrac{3}{2}(\mathbf{r}\mathbf{h}_1)(\mathbf{r}\mathbf{h}_2) - \tfrac{1}{2}\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2\right] \\ &= \frac{1}{r^3}\left(\tfrac{3}{2}\cos\theta_1\cos\theta_2 - \tfrac{1}{2}\cos\theta_{12}\right).\end{aligned} \tag{288b}$$

Mniejsza zresztą o postać szczególną różnych tych funkcyj harmonicznych. Dość będzie zauważyć, że $\varphi^{(n)}$ jest iloczynem $r^{-(n+1)}$ i pewnej funkcyi kątów θ_1, θ_2, θ_3, ... θ_n oraz θ_{12}, θ_{13}, w ogóle θ_{ik}, a raczej dostaw tych kątów, t. j. iloczynów skalarnych $\mathbf{r}\mathbf{h}_1$, ... $\mathbf{r}\mathbf{h}_n$, oraz $\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_1\mathbf{h}_3$, w ogóle $\mathbf{h}_i\mathbf{h}_k$. Oznaczając funkcyę tę, według utartego zwyczaju **, przez Y_n, napiszemy

$$\varphi^{(n)} = \frac{Y_n}{r^{n+1}}. \tag{289}$$

Y_n nazywa się krótko *funkcyą kulistą*, rzędu n, a mianowicie funkcyą *Laplace'a*, jeżeli osie $\mathbf{h}_1$, ... $\mathbf{h}_n$ są w ogóle różne, zaś funkcyą *Legendre'a*, lub *strefową*, jeżeli wszystkie te osie zlewają się ze sobą; znaczenie ostatniej nazwy zrozumiemy niebawem. ***

---

* Przez $\mathbf{r}$ rozumiemy raz na zawsze wektor jednostkowy w kierunku *Op*.

** Spotyka się też również często symbol $Y^{(n)}$.

*** *Legendre* i *Laplace* zbadali funkcye te w tym samym niemal czasie: 1785—7; pewne wskazówki co do literatury, bardzo bogatej, przedmiotu tego czytelnik znajdzie w Repert. Pascala, T. I. Rozdz. XVIII lub u *Maxwella*, który w Rozdz. IX swego klasycznego dzieła dał najłatwiejszy może i najbardziej pociągający (szczególniej dla fizyków) zarys teoryi funkcyj kulistych; na nim też wzorowałem się w zasadzie; ze względu na cel niniejszej książki i na ciasne jej ramy musiałem zresztą ograniczyć się do pewnych tylko punktów tego przedmiotu.

Skoro osie $\mathbf{h}_1, \ldots \mathbf{h}_n$ funkcyi kulistej są dane, wszystkie $\cos\theta_{ik}$, czyli iloczyny skalarne $\mathbf{h}_i\mathbf{h}_k$ odgrywają rolę *stałych*, tak iż Y_n zależy jedynie od $\mathbf{rh}_1, \ldots \mathbf{rh}_n$, to jest ostatecznie od kierunku wektora $\mathbf{r}$, czyli od położenia jego punktu końcowego na kuli jednostkowej zatoczonej naokoło punktu O, a więc np. od spółrzędnych biegunowych tego punktu θ, ε omówionych w § 87. Możemy przeto napisać $Y_n = Y_n(\theta, \varepsilon)$. Osiom h_1 i t. d. odpowiadają na tejże kuli określone punkty 1, 2, ... n, które nazywają się *biegunami* rozważanej funkcyi kulistej. Y_n zawiera tedy oprócz spółrzędnych θ, ε punktu ruchomego wielkości stałe zależne od rozmieszczenia biegunów 1, 2, ... n na owej kuli.

Mamy np., według (288a), (288b)

$Y_1 = \cos\theta_1 = \cos\theta$ (jeżeli jedyną oś funkcyi obierzemy jako oś spółrzędnych θ, ε),

$$Y_2 = \tfrac{1}{2}(3\cos\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_{12});$$

dla $n = 0$ jest $Y_0 = 1$.

Nie wdając się zresztą w rozważanie sposobu zależności funkcyi Y_n dowolnego rzędu od konfiguracyi jej biegunów, podamy tu tylko równanie różniczkowe, któremu Y_n czyni zadość jako funkcya zmiennych niezależnych θ, ε punktu ruchomego na kuli.

Wiedząc z góry już, że $\varphi^{(n)}$ czyni zadość równaniu Laplace'a, z wyjątkiem środka kuli podstawowej, wprowadźmy do postaci (287) tego równania $\varphi = \varphi^{(n)}$. Według (289) otrzymamy

$$r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -(n+1)Y_n r^{-n}, \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = n(n+1)Y_n r^{-(n+1)}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\partial Y_n}{\partial\theta}r^{-(n+1)}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varepsilon^2} = \frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varepsilon^2}r^{-(n+1)},$$

a więc

$$(290)\qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varepsilon^2} + n(n+1)Y_n = 0$$

czyli

$$(290)\qquad \frac{\partial^2 Y_n}{\partial\theta^2} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varepsilon^2} + (n+1)Y_n = 0.$$

Oto jest znane równanie różniczkowe funkcyi kulistej Laplace'a rzędu n.

Jeżeli wszystkie bieguny funkcyi Y_n zlewają się w jednym punkcie, otrzymujemy funkcyę strefową, czyli funkcyę Legendre'a n-go rzędu; punkt ów nazywa się jej *biegunem* (n-krotnym), oś od-

powiednia—*osią* (n-krotną) *funkcyi strefowej*, którą oznacza się przez P_n. * Uważając tę właśnie oś funkcyi P_n jako oś układu spółrzędnych biegunowych θ, ε, zrozumiemy łatwo, że P_n zależy tylko od θ, nie zaś od ε. Mamy przeto według ogólniejszego równania (290):

$$\frac{d^2P_n}{d\theta^2} + cotg\theta\frac{dP_n}{d\theta} + n(n+1)P_n = 0. \tag{291}$$

Oto jest równanie różniczkowe funkcyi kulistej strefowej rzędu n; θ nazywa się odległością biegunową punktu ruchomego.

Liniami stałych wartości P_n są koła równoleżnikowe, skoro zechcemy nazwać $\theta = \frac{1}{2}\pi$ równikiem kuli podstawowej. Z powyższych trzech pierwszych funkcyi Laplace'a otrzymamy, kładąc $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $\theta_{12} = 0$:

$$P_0 = 1;\ P_1 = cos\,\theta;\ P_2 = \tfrac{1}{2}(3\,cos^2\theta - 1).$$

Funkcya strefowa P_0 jest więc stałą (= 1) na całej kuli; funkcya P_1 posiada maximum w swym biegunie $\theta = 0$, minimum w punkcie $\theta = \pi$, jest dodatnia na jednej półkuli, ujemna na drugiej i znika na równiku. Funkcya P_2 znika dla $\theta = \arccos \sqrt{\frac{1}{3}}$ t.j. na równoleżnikach $\theta = 54^0 45'$ i $\theta = 125^0 15'$; w trzech powstałych tym sposobem *strefach* jest naprzemian dodatnią, ujemną, dodatnią. Podobne własności przysługują funkcyom P_3, P_4 i t. d.; stąd też nazwa funkcyj strefowych.

Pisząc $h_1 = h_2 \ldots = h_n$, mamy według (288) i (289):

$$P_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial h^n}\left(\frac{1}{r}\right); \tag{292}$$

wykonywając różniczkowania, jak wyżej, i oznaczając $cos\,\theta$ przez μ, otrzymuje się

$$P_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!}\left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \ldots\right]. \tag{293}$$ **

P_n jest więc funkcyą n-tego stopnia zmiennej $\mu = \cos\theta$; można okazać, że wszystkie pierwiastki równania $P_n(\mu) = 0$ są rzeczywi-

---

* Również często spotyka się symbol $P^{(n)}$.

** Wartości liczebne, z dokładnością na 4 miejsca dziesiętne, funkcyj P_1 aż do P_7 włącznie, w odstępie 1°, znajdzie czytelnik w „Tablicach" Prof. Witkowskiego, str. 90—91.

ste, różne między sobą i bezwzględnie mniejsze od jedności. Funkcya strefowa P_n znika przeto na n równoleżnikach; w każdej strefie, zawartej między dwoma takiemi równoleżnikami P_n posiada wartości wyłącznie dodatnie lub wyłącznie ujemne, w strefie biegunowej zawsze dodatnie; w przyległych strefach funkcya P_n jest naprzemian dodatnią i ujemną. Jako symetryczne naokoło swej osi, funkcye strefowe nadają się do rozwiązywania takich zadań elektrostatycznych dotyczących przewodników kulistych (i innych matematycznie pokrewnych zadań), w których oczywiście warunki symetryi osiowej są zachowane, w których—innemi słowy—pole jest osiowo symetryczne. Zobaczymy to niebawem na jednym lub dwóch przykładach.

Wiemy już, że funkcya $\varphi^{(n)}$, którą obecnie napiszemy

$$\varphi_z = Y_n r^{-(n+1)}$$

czyni zadość równaniu Laplace'a, z wyjątkiem punktu O, czyli środka kuli podstawowej, w którym staje się nieskończoną, a raczej nieokreśloną, ze względu pa θ, ε zawarte w Y_n. Funkcya ta znika natomiast w nieskończoności i jest poza tem wszędzie ciągłą i skończoną wraz ze swemi pochodnemi. Innemi słowy: φ_z jest całką równania Laplace'a, która *nazewnątrz* kuli * otaczającej punkt O (dowolnie małej zresztą) *nie posiada żadnych punktów osobliwych*. Wskaźnik z ma właśnie być skrótem dla „zewnątrz".

Otóż według jednego z zasadniczych twierdzeń teoryi funkcyj kulistych, nietylko $Y_n r^{-(n+1)}$, lecz również $Y_n r^n$ czyni zadość równaniu Laplace'a. Aby twierdzenia tego dowieść, położmy $\varphi = Y_n r^n$; otrzymamy wówczas

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = n(n+1) Y_n r^n, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} r^n, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varepsilon_2} r^n,$$

a więc, posługując się wyrazem (286) operatora ∇^2:

$$r^2 \nabla^2 \varphi = r^n \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varepsilon^2} + n(n+1) Y_n\right];$$

lecz według (290) suma wyrazów w nawiasach znika. Skoro więc tylko r nie staje się nieskończenie wielkiem, mamy dla wszelkich n: $\nabla^2(Y_n r^n) = 0$.

Funkcya więc

$$\varphi_w = Y_n r^n$$

jest całką równania Laplace'a, która *wewnątrz* kuli * otaczającej

---

* lub innej zresztą powierzchni zamkniętej, otaczającej zewsząd punkt O.

punkt O (o dowolnym, byle tylko skończonym promieniu) *nie posiada żadnych punktów osobliwych.* Wskaźntk *w* czytaj „wewnątrz". Funkcya więc φ_w stanowi pożądane uzupełnienie funkcyi φ_z.

Funkcye te nie tracą, oczywiście, podkreślonych dopiero co własności, skoro każdą z nich pomnożymy przez stałą dowolną, byle tylko skończoną.

Wyobraźmy sobie teraz kulę geometryczną* o promieniu $r = R$ skończonym, zatoczoną naokoło punktu O. Niechaj φ oznacza potencyał elektrostatyczny; połóżmy dla wnętrza tej kuli φ równe

$$\varphi_w = \frac{r^n}{R^{n+1}} Y_n \qquad (r \leq R), \tag{294}$$

dla wszystkich zaś punktów zewnętrznych

$$\varphi_z = \frac{R^n}{r^{n+1}} Y_n \qquad (r \geq R). \tag{295}$$

Dla $r = R$ będzie wówczas $\varphi_z(R) = \varphi_w(R) = \varphi(R)$, a mianowicie $= Y_n R^{-1}$; potencyał φ będzie przeto ciągłym przy przejściu przez powierzchnię kuli; innemi słowy: φ_z nawiązuje się w sposób ciągły do φ_w.

Pochodna jego ze względu na r, t. j. odpowiednia siła elektryczna dozna tu natomiast skoku; jeżeli, dla uproszczenia pisowni, założymy $K = 1$, wielkość tego skoku będzie gęstością powierzchniową ładunku η. Otrzymamy przeto, dodając wskaźnik n, mający nam przypominać rząd funkcyi kulistej:

$$\eta_n = -\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_w}{\partial r}\right)_{r=R}$$

t. j. według (294) i (295):

$$\eta_n = \frac{(2n+1)}{R^2} Y_n. \tag{296}$$

Jeżeli więc powierzchnia kuli o promieniu R jest siedliskiem ładunku elektrycznego o rozmieszczeniu (296), *poza tem zaś w całej przestrzeni* (wewnętrznej i zewnętrznej) *niema żadnych ładunków, natenczas potencyał wewnątrz tej kuli jest dany przez* (294), *nazewnątrz zaś przez* (295).

Ponieważ zaś φ_w, φ_z czynią też zadość wszystkim warunkom dodatkowym (ciągłości i t. d.), przeto stanowią one *jedyne* rozwią-

---

* nie utożsamiając jej bynajmniej jeszcze z powierzchnią przewodnika kulistego.

znnie zadania, t. j. dają jedynie możliwe pole elektrostatyczne odpowiadające tak naelektryzowanej powierzchni kulistej.

Twierdzenie to, które zaczerpnąłem całkowicie z dzieła Maxwella (*loc. cit.*, art. 131) jest nader płodne w zastosowania; o ile chodzi o przewodniki kuliste, daje ono nader wygodną metodę rozwiązywania zadań elektrostatycznych.

Zanim do zastosowań tych przejdziemy, zauważmy tu jeszcze, że *ładunek całkowity* e_n odpowiadający gęstości η_n, a mianowicie

$$e_n = \frac{(2n+1)}{R^2} \int Y_n d\sigma,$$

równa się zeru.

Wynika to z pewnego twierdzenia, które przytoczę tu bez dowodu *). Jeżeli mianowicie Y_m, Y_n są funkcyami kulistemi *rożnych* rzędów, mamy

$$\int Y_m Y_n d\sigma = 0 \qquad (m \neq n) \tag{297}$$

gdzie całka obejmuje powierzchnię kuli o środku O; przez O rozumiem, raz na zawsze, „początek“ spółrzędnych θ, ε tkwiących w Y_m, Y_n czyli środek „kuli podstawowej“ tych funkcyj, o którym zakładamy oczywiście, że jest wspólny jednej i drugiej funkcyi; bieguny ich zresztą mogą być rozmieszczone zupełnie dowolnie.

Otóż, dla $m = 0$ mamy $Y_m = 1$, a więc

$$\int Y_n d\sigma = 0. \tag{297a}$$

tak iż $e_n = 0$, jak zapowiedziano. Gęstość więc η_n musi w pewnych punktach owej powierzchni kulistej być dodatnią w innych ujemną.

Dla uzupełnienia własności zasadniczej (296) dodajmy jeszcze, odsyłając czytelnika po dowód do dzieł specyalnych, że dla $m = n$ całka $\int Y_m Y_n d\sigma$ jest *różną od zera*, niezależnie zresztą od tego, czy bieguny jednej funkcyi zlewają się z biegunami drugiej czy też nie; wartość tej całki wyraża się wówczas w sposób dość zawiły przez liczbę i sposób rozmieszczenia tych biegunów. Wzoru ogólnego dla tej całki nie uważam za stosowne nawet przytoczyć. Je-

*) Dowód ten czytelnik znajdzie również u Maxwella, lub w każdem niemal dziele o funkcyach kulistych.

żeli jedna z tych funkcyj jest *strefową*, powiedzmy $Y_m = P_m$, zawiły ten wzór upraszcza się; wówczas jest mianowicie

$$(298) \qquad \int Y_n P_m d\sigma = \frac{4\pi R^2}{(2n+1)} Y_n(m), \quad \text{dla } m = n,$$

gdzie $Y_n(m)$ oznacza wartość funkcyi Y_n w biegunie (jedynym) funkcyi strefowej P_m. Dla różnych m, n mamy oczywiście, jako wypadek szczególny własności (296)

$$(299) \qquad \int Y_n P_m d\sigma = 0, \quad m \neq n$$

a więc też

$$(300) \qquad \int P_n P_m d\sigma = 0, \quad m \neq n$$

niezależnie zresztą od tego, czy biegun jednej funkcyi zlewa się z biegunem drugiej, czy też nie.

Wzór (298) daje w wypadku szczególnym $Y_n = P_n$, t. j. dla dwóch funkcyj strefowych *tego samego rzędu*, lecz o różnych w ogóle biegunach:

$$\int P_n P_m d\sigma = \frac{4\pi R^2}{(2n+1)} P_n(m), \quad \text{dla } m = n;$$

w szczególności, jeżeli bieguny tych funkcyj zlewają się ze sobą, mamy $P_n P_m = P_n^2$, zaś $P_n(m) = P_n(n)$ wyraża wówczas wartość funkcyi P_n *we własnym jej biegunie*, t. j. dla $\theta = 0$ czyli $\mu = \cos\theta = 1$; wartość ta, jak nietrudno okazać, równa się *jedności*; według ostatniego wzoru będzie przeto, dla dowolnej funkcyi strefowej

$$(301) \qquad \int P_n^2 d\sigma = \frac{4\pi R^2}{2n+1},$$

czyli: wartość *przeciętna* kwadratu funkcyi strefowej na powierzchni kuli zatoczonej naokoło punktu O będzie (niezależnie od promienia tej kuli)

$$(301) \qquad \overline{P_n^2} = \frac{1}{2n+1}.$$

Dla $n = 0$ otrzymujemy stąd, ze względu na $P_0 = 1$, banalną identyczność. Dla $n = 1$ np. będziemy mieli $\overline{\cos^2\theta} = \frac{1}{3}$, co łatwo jest sprawdzić bezpośrednio, i tak dalej.

Jeżeli jakakolwiek funkcya f daje się rozwinąć w szereg funkcyj kulistych:

$$f = a_0 Y_0 + a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots = \sum a_i Y_i \,, \qquad (302')$$

o spółczynnikach a_i niezależnych od θ, ε, można natychmiast znaleść wszystkie te spółczynniki. Istotnie, aby znaleść żądany spółczynnik a_i, pomnóżmy (302') obustronnie przez funkcyę strefową P_i i scałkujmy dla dowolnej kuli (o środku O); wówczas, według (299), wszystkie wyrazy zawierające Y o wskaźnikach *różnych* od i odpadną, tak iż pozostanie tylko

$$\int P_i f d\sigma = a_i \int Y_i P_i d\sigma = \frac{4\pi R^2}{2i+1} a_i Y_i(i) \,,$$

gdzie $Y_i(i)$ jest wartością funkcyi Y_i w biegunie użytej funkcyi strefowej P_i. Biorąc dla rozważanego punktu funkcyę F_i posiadającą swój biegun w tym właśnie punkcie, otrzymamy $Y_i(i) = Y_i$, gdzie Y_i ma to samo znaczenie co w (302'). Rozwinięcie (302') przybierze więc postać

$$f = \frac{1}{4\pi R^2}\left[\int f.d\sigma + 3\int f.P_1 d\sigma + 5\int f.P_2 d\sigma + \ldots\right] = \frac{1}{4\pi R^2}\sum (2i+1)\int P_i f d\sigma. \qquad (302)$$

Na podobnej [do (299)] własności funkcyj trygonometrycznych *sin* lub *cos* polega np. wyznaczenie spółczynników w rozwinięciach Fourierowskich. Analogiczne zresztą stosunki spotykamy w wielu innych dziedzinach matematycznych.

Jeżeli w szczególności funkcya f daje się rozwinąć w szereg

$$f = \sum a_i P_i \,, \qquad (303)$$

gdzie wszystkie funkcye strefowe posiadają biegun wspólny, czyli oś wspólną, a niezbędnym po temu warunkiem jest oczywiście to, że funkcya f musi być *symetryczna* (naokoło tej właśnie osi), natenczas, rozumując jak wyżej i opierając się na (301), mamy $\int P_i f d\sigma = a_i \int P_i^2 d\sigma = \frac{4\pi R^2}{2i+1} a_i$, a więc wprost już

$$a_i = \frac{2i+1}{4\pi R^2}\int P_i f d\sigma = (2i+1).\overline{P_i f} \,, \qquad (303a)$$

gdzie $\overline{P_i f}$ jest przeciętną wszystkich wartości, jakie $P_i f$ przybiera na kuli o promieniu R. Zauważmy, że przejście od (303) do (303a) opiera się na założeniu, że spółczynniki a_i są stałe na *danej* kuli; mogą one jednak, oczywiście, zależeć od r; sama funkcya f, jako osiowo symetryczna może więc w ogóle zależeć od θ, r, lecz nie od ε.

Rozważymy teraz kilka najbardziej rozpowszechnionych zastosowań funkcyj kulistych.

§ 89. ***Przewodnik kulisty wobec punktu elektrycznego.*** — Niechaj w dielektryku izotropowym i jednorodnym, o spółczynniku $K = 1$, znajduje się przewodnik kulisty o promieniu R i środku O; nazewnątrz tej kuli, w danym punkcie A niechaj będzie skoncentrowany ładunek elektryczny e; położmy $OA = a$, tak iż $a > R$. Oprócz tego dany jest albo potencyał przewodnika albo też *całkowity* ładunek rozmieszczony na jego powierzchni. Poza tem cała przestrzeń ma być wolna od ładunku elektrycznego. *

Chodzi o znalezienie całego pola elektrostatycznego, czyli o potencyał φ dla każdego punktu dielektryka, w szczególności zaś o rozmieszczenie ładunku na powierzchni kuli, czyli o gęstość η dla każdego jej punktu. Skoro zresztą znajdziemy η, obliczenie całego pola zredukuje się, jak wiemy, do zwyczajnej kwadratury, tak iż z otrzymaniem wzoru dla η można uważać zadanie jako całkowicie rozwiązane.

Gdyby oprócz „punktu elektrycznego“ A nie było żadnych innych ładunków, ani przestrzennych, *ani powierzchniowych*, gdyby więc nie było przewodnika, na powierzchni którego urywają się linie elektryczne, mielibyśmy dla potencyału w dowolnym punkcie przestrzeni p:

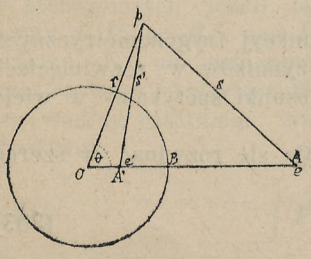


Fig. 40.

$$\varphi = \frac{e}{4\pi}/\overline{Ap} \quad \text{(według § 68).}$$

Na powierzchni przewodnika mamy jednak ładunek o gęstości η (nieznanej), który również należy uwzględnić. Warunki zadania w niczem się nie zmienią, jeżeli wyobrazimy sobie, że przewodnika niema, czyli że cała

* Mówiąc o *punkcie A*, w którym jest „skoncentrowany“ ładunek e (skończony), czyli o „punkcie elektrycznym“, posłużyłem się utartym językiem matematycznym; fizyk powinienby powiedzieć: ładunek skończony e znajduje się w dziedzinie skończonej lecz o rozmiarach bardzo małych w porównaniu z odległością od środka kuli (a więc też w porównaniu z samym promieniem tej kuli). Wyobrażamy sobie, że czytelnik tak właśnie interpretować będzie słowa tekstu.

przestrzeń jest wypełniona jednolitym dielektrykiem, lecz że kula R, pomyślana czysto geometrycznie, jest siedzibą ładunku o gęstości powierzchniowej η. Oznaczmy przez ω potencyał, który odpowiadałby temu ładunkowi powierzchniowemu (w nieobecności punktu elektrycznego) w dowolnym punkcie p. Ponieważ pole rzeczywiste będzie superpozycyą tych dwojga pól pomyślanych, otrzymamy dla potencyału rzeczywistego φ w dowolnym punkcie przestrzeni p:

$$\varphi = \omega + \frac{e}{4\pi}\frac{1}{s}, \qquad (304)$$

gdzie $s = \overline{Ap}$ (Fig. 40). Odległość dowolnego punktu przestrzeni p od środka kuli O oznaczymy, jak zwykle, przez r, wprowadzając zresztą jako drugą spółrzędną biegunową kąt $AOp = \theta$.

Wewnątrz kuli i na jej powierzchni potencyał φ ma posiadać wartość stałą; oznaczmy ją przez V (będzie to potencyał przewodnika).

Stosując wskaźniki w, z do wnętrza kuli, względnie do przestrzeni zewnętrznej, otrzymamy więc, według (304)

$$\omega_w = V - \frac{e}{4\pi}\frac{1}{s_w} \quad (\text{dla } r \leq R). \qquad (305)$$

Otóż, dzięki tej właśnie okoliczności, że $r \leq R$, a więc $r < a$, można $1/s_w$, zawsze skończone, rozwinąć w szereg według potęg dodatnich wielkości r/a.

Istotnie, według powyższych oznaczeń (Fig. 40) mamy

$$s_w^2 = a^2 - 2ar\cos\theta + r^2,$$

czyli, pisząc znowu $\cos\theta = \mu$ i kładąc dla skrócenia $ra^{-1} = h$:

$$\frac{a}{s_w} = [1 - 2\mu h + h^2]^{-\frac{1}{2}} = [1 + h(h - 2\mu)]^{-\frac{1}{2}},$$

a rozwijając ostatni wyraz według „dwumianu Newtona“ i grupując wyrazy według potęg h:

$$\frac{a}{s_w} = 1 + h.\mu + h^2.(\tfrac{3}{2}\mu^2 - \tfrac{1}{2}) + \ldots\ldots;$$

lecz, jak już widzieliśmy na str. 282, $\mu = P_1$; $\frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2} = P_2$; co do dalszych spółczynników przekonalibyśmy się również łatwo, że są one identyczne z funkcyami strefowemi P_3, P_4 i t. d., w ogóle P_n, a mianowicie w powyżej podanej postaci (293). Istotnie też w dziełach matematycznych funkcya $P_n(\mu)$ bywa od samego początku okre-

ślana jako spółczynnik przy h^n w rozwinięciu wyrazu $[1-2\mu h+h^2]^{-\frac{1}{2}}$ i jako taka nazywa się też często „spółczynnikiem Legendre'a".

Mamy tedy, wracając do znaczenia $h = ra^{-1}$

$$\frac{1}{s_w} = \frac{1}{a}\sum_0^\infty \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n = \sum_0^\infty \left(\frac{R}{a}\right)^{n+1} \frac{r^n P_n}{R^{n+1}} \tag{306}$$

gdzie osie wszystkich funkcyj strefowych P_n zlewają się z kierunkiem OA, t. j. wskazują od środka kuli do punktu elektrycznego. Według (305) będzie przeto

$$\omega_w = \frac{R}{a}\left(Va - \frac{e}{4\pi}\right)\frac{P_0}{R} - \frac{e}{4\pi}\sum_1^\infty \left(\frac{R}{a}\right)^{n+1} \frac{r^n}{R^{n+1}} P_n. \tag{307}$$

Jestto potencyał samego ładunku rozmieszczonego na kuli, dla punktów *wewnętrznych*, t. j. dla $r \leq R$; potencyał ω_z tegoż ładunku dla punktów *zewnętrznych*, t. j. dla $r \geq R$, będzie więc według twierdzenia wygłoszonego w § 88 w związku z równaniami (294), (295):

$$\omega_z = \frac{R}{a}\left(Va - \frac{e}{4\pi}\right)\frac{P_0}{r} - \frac{e}{4\pi}\sum_1^\infty \left(\frac{R}{a}\right)^{n+1} \frac{R^n}{r^{n+1}} P_n. \tag{308}$$

Jednocześnie też otrzymamy bezpośrednio, według (296), poszukiwaną *gęstość* η ładunku rozmieszczonego na powierzchni kuli, a mianowicie

$$\eta = \frac{1}{R}\left(V - \frac{e}{4\pi a}\right) - \frac{e}{4\pi R^2}\sum_1^\infty (2n+1)\left(\frac{R}{a}\right)^{n+1} P_n. \tag{309}$$

Zadanie jest więc rozwiązane. W powyższym bowiem wzorze spółczynniki funkcyj P_1, P_2 i t. d. są określone przez wielkości dane e, R, a; jeżeli dany jest oprócz tego *potencyał* V przewodnika, znamy też pierwszy wyraz, stały; jeżeli zaś dany jest *ładunek całkowity* przewodnika, powiedzmy Q, natenczas możemy stąd obliczyć V bardzo łatwo. Mamy bowiem $Q = \int \eta d\sigma$; ponieważ zaś, według (300), $\int P_n d\sigma = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$, przeto według (309) będzie

$$Q = 4\pi R V - \frac{eR}{a}, \tag{310'}$$

a więc

$$V = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{Q}{R} + \frac{e}{a}\right). \qquad (310)$$

Wzór ten wyraża treść znanego twierdzenia: potencyał przewodnika kulistego równa się sumie potencyału ładunku zewnętrznego (e) w środku kuli i potencyału, który posiadałby przewodnik dzięki własnemu tylko ładunkowi swemu (Q). Twierdzenie to zachodzi też zresztą, jeżeli zamiast punktu elektrycznego mamy ładunki dowolnie rozmieszczone w dielektryku.

Zadanie w tym wypadku ogólniejszym rozwiązuje się przez superpozycyę rozwiązań podobnych do powyższego dla poszczególnych punktów elektrycznych czyli ładunków elementarnych. Biegunny funkcyj strefowych w rozwinięciach ω, φ, a więc też i η będą w tym wypadku w ogóle różne dla różnych punktów elektrycznych, tak iż ostatecznie po zesumowaniu wszystkich wyrazów otrzymamy szeregi zawierające ogólniejsze funkcye Laplace'a Y_n, nie zaś strefowe P_n. Innemi słowy, zadanie będzie rozwiązane, skoro tylko rozwiniemy potencyał danego układu ładunków w dielektryku w szereg $\sum a_n Y_n$. Dalsze rozumowanie będzie bowiem zupełnie podobne do powyższego. Jedynie tylko w tych wypadkach, w których ów układ ładunków jest symetryczny naokoło jednej ze średnic przewodnika kulistego, funkcye Laplace'a staną się strefowemi.

Wracając do (309), zauważmy, że wzór ten można napisać, według (310):

$$\eta = \frac{Q}{4\pi R^2} - \frac{e}{4\pi R^2}\sum_1^\infty (2n+1)\left(\frac{R}{a}\right)^{n+1} P_n\ ; \qquad (309')$$

wyraz pierwszy, stały, odpowiada *jednostajnemu* rozmieszczeniu *własnego* ładunku przewodnika, na całej jego powierzchni $4\pi R^2$; suma pozostałych wyrazów daje gęstość ładunku *„wzbudzonego"* dzięki obecności punktu elektrycznego e. Owo rozmieszczenie jednostajne superponuje się poprostu z tem rozmieszczeniem wzbudzonem, dość zawiłem.

Ponieważ tedy obecność własnego ładunku przewodnika nie sprawia żadnych trudności, możemy założyć, że $Q = 0$.

Otrzymamy tedy dla rozmieszczenia ładunku, odtąd już całkowicie wzbudzonego

$$\eta = -\frac{e}{4\pi R^2}\sum_1^\infty (2n+1)\left(\frac{R}{a}\right)^{n+1} P_n. \qquad (309a)$$

Ponieważ $a < R$, szereg ten jest zbieżny, a zbieżność jego jest tem szybsza, im większa jest odległość punktu elektrycznego (a) w porównaniu z promieniem kuli. Dla $a = 10R$ mielibyśmy np. $\sum = 3.10^{-2}P_1 + 5.10^{-3}P_2 + 7.10^{-4}P_3 + \ldots$; ponieważ zaś $|P_n| \leq 1$, przeto wyraz czwarty np. będzie już mniejszy niż 10^{-4}, i tak dalej. Ponieważ $max.\, P_n = 1$ i zachodzi dla $\theta = o$, t. j. w punkcie B, w którym prosta OA przecina kulę, przeto gęstość wzbudzona będzie w tym punkcie *największa*, a wartość jej będzie dana przez

$$\eta_B = -\frac{e}{4\pi R^2}\sum_1^\infty (2n+1)\left(\frac{R}{a}\right)^{n+1}; \tag{311}$$

ładunek wzbudzony w okolicy bieguna będzie więc miał znak przeciwny względem ładunku e punktu elektrycznego; w okolicy bieguna przeciwległego (t.j. $\theta = \pi$) będziemy mieli ładunek jednoimienny z ładunkiem e,—jak wiadomo z wykładów elementarnych. Zbadanie „linii obojętnej", t. j. równoleżnika, na którym η równa się zeru, pozostawiam czytelnikowi.

§ 90. *Metoda obrazów elektrycznych.* — Rachunek przeprowadzony w § 89 miał na celu ilustracyę metody funkcyj kulistych i konkretnych sposobów jej stosowania; wróćmy teraz do rozważanego tam zagadnienia w innym celu.

Według (304) potencyał (całkowity) dla punktów leżących nazewnątrz przewodnika kulistego jest

$$\varphi_z = \frac{e}{4\pi}\frac{1}{s} + \omega_z \tag{312}$$

gdzie pierwszy wyraz jest potencyałem „wytworzonym" przez sam punkt elektryczny, zaś ω_z potencyałem zawdzięczanym ładunkowi rozmieszczonemu na przewodniku, a mianowicie dla punktów *zewnętrznych*.

Dla ω_z mieliśmy wzór (308), który możemy napisać

$$\omega_z = \frac{RV}{r} - \frac{e}{4\pi}\frac{R}{a}\sum_0^\infty \frac{a'^n}{r^{n+1}}P_n, \tag{313}$$

kładąc mianowicie dla skrócenia:

$$a' = R^2/a.$$

Otóż, wzorując się na § 89, przekonamy się łatwo, że

$$\sum_0^\infty \frac{a'^n}{r^{n+1}}P_n = (a'^2 - 2ra'\cos\theta + r^2)^{-\frac{1}{2}};$$

jeżeli więc obierzemy na osi OA punkt A' w odległości a' od środka kuli (Fig. 40) i oznaczymy przez s' odległość dowolnego punktu zewnętrznego p od punktu A', otrzymamy $\sum = 1/s'$, a więc zamiast (313)

$$\omega_z = \frac{RV}{r} - \frac{1}{4\pi}\frac{eR}{a}\cdot\frac{1}{s'},$$

czyli wreszcie

$$\omega_z = \frac{RV}{r} + \frac{e'}{4\pi}\frac{1}{s'}, \quad \text{gdzie } e' = -\frac{R}{a}e. \tag{314}$$

Jeżeli kula R jest połączona z ziemią, czyli $V = 0$, pierwszy wyraz odpada; podstawiając więc ω_z w (312), otrzymuje się:

$$\varphi_z = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e}{s} + \frac{e'}{s'}\right). \tag{315}$$

Potencyał, a więc też pole elektryczne *nazewnątrz* przewodnika kulistego jest takie, jak gdyby oprócz punktu rzeczywistego A (o ładunku e) znajdował się w punkcie A' ładunek e', i jak gdyby nie było wcale przewodnika; innemi słowy: *punkt elektryczny A' jest pod względem działania nazewnątrz kuli zupełnie równoważny ładunkowi rozmieszczonemu na jej powierzchni.*

Równoważność tę spostrzegł Sir *William Thomson* (Lord *Kelvin*), (1848); oparł on na niej potężną metodę *„obrazów elektrycznych“*, którą rozwinęli następnie Helmholtz, Maxwell i inni, a która przy niewielkiej modyfikacyi znajduje też liczne zastosowania w teoryi ruchu cieczy nieściśliwej.

Punkt A' nazywa się mianowicie *obrazem elektrycznym* punktu A, względem kuli R,—nazwa oparta oczywiście na analogii obrazu optycznego, wirtualnego. Obraz elektryczny, jak widzieliśmy, leży z oryginałem na jednej średnicy kuli, a położenie jego i ładunek są wyznaczone przez

$$aa' = R^2, \text{ czyli } \overline{OA}.\overline{OA'} = R^2, \tag{316}$$

$$e' = -\frac{R}{a}e\,; \tag{317}$$

ładunki oryginału i obrazu są więc zawsze różnoimienne.

Można się też przekonać, za pomocą elementarnej konstrukcyi geometrycznej, że dwa takie ładunki skoncentrowane w wymienionych punktach dają potencyał stały, a mianowicie równy zeru, na powierzchni kuli R, innemi słowy, że $e/s + e'/s' = 0$ jest równaniem tej właśnie kuli, skoro tylko zachodzą stosunki (316), (317).

Z konstrukcyi tej wynika też bezpośrednio własność odwrotna, a mianowicie: jeżeli A' o ładunku e' jest punktem elektrycznym rzeczywistym znajdującym się *wewnątrz* powłoki kulistej R, połączonej z ziemią, natenczas punkt zewnętrzny A o ładunku $e = -ae'/R$ jest jego *obrazem* elektrycznym, t. j. zastępuje zupełnie ładunek rozmieszczony na wewnętrznej stronie tej powłoki, lecz jedynie o tyle, o ile chodzi o pole elektryczne *zawarte wewnątrz kuli*. Podobnie też, w poprzednim wypadku, obraz A' punktu A był równoważny ładunkowi powierzchniowemu jedynie tylko pod względem „działania *nazewnątrz* kuli", t. j. dawał ω_z, lecz bynajmniej nie ω_w. Rola więc obrazu elektrycznego ogranicza się do *tej* z dwóch dziedzin, w której się on *nie* znajduje, a to właśnie przypomina najbardziej rolę obrazów optycznych wirtualnych.

Jeżeli potencyał kuli jest *różny od zera*, mamy jeszcze dla φ_z pewien wyraz dodatkowy, a mianowicie według (314)

$$\frac{RV}{r},$$

a więc taki, jak gdyby we środku kuli O znajdował się ładunek $4\pi RV$. Całkowity ładunek rozmieszczony na kuli będzie $Q = e' + 4\pi RV$, a więc według (317), $Q = 4\pi RV - eR/a$, jak w (310′).

Jeżeli kula przewodząca staje się *płaszczyzną* nieograniczoną ($R = \infty$), obraz punktu elektrycznego umieszczonego po jednej stronie, znajdować się będzie po drugiej stronie, na tej samej normalnej i w tej samej odległości od płaszczyzny, zupełnie jak obraz w zwierciedle płaskiem; ładunki zaś obrazu i oryginału będą równe co do wielkości i różnoimienne. Istotnie, powierzchnią stałego potencyału zero jest, dla takiej pary punktów elektrycznych, płaszczyzna przechodząca przez środek łączącej je prostej i normalna do niej.

Jeżeli nazewnątrz (lub wewnątrz) kuli R mamy zamiast jedynego punktu elektrycznego kilka takich punktów lub ogólniej dany układ ładunków o dowolnem rozmieszczeniu trwałem, natenczas każdemu punktowi lub elementowi tego układu odpowiada wewnątrz (względnie zewnątrz) kuli zupełnie określony obraz elektryczny; całemu układowi ładunków odpowiada więc pewien obraz elektryczny; oznaczając przez r, de; r', de' odległość od środka kuli i ładunek dowolnego elementu $d\tau$ oryginału, względnie elementu $d\tau'$, który jest jego obrazem, mamy

$$(318) \qquad rr' = R^2, \quad de' = -\frac{R}{r}de = -\frac{r'}{R}de.$$

Wszelkie więc zadania elektrostatyczne, dotyczące przewodnika kulistego w obecności danych ładunków w dielektryku (nazewnątrz kuli

lub wewnątrz powłoki kulistej przewodzącej) można uważać jako rozwiązane.

Metoda obrazów elektrycznych daje się też znakomicie zastosować do dwóch kul lub płaszczyzn (a nawet trzech i czterech), szczególniej, gdy powierzchnie te przecinają się pod kątem π/n, gdzie n jest jakąkolwiek liczbą *całkowitą* skończoną; w tym bowiem wypadku liczba obrazów danego punktu elektrycznego jest *skończona*, a mianowicie równa $2n - 1$, tak iż rachunki lub odpowiednie konstrukcye dają się łatwo uskutecznić. W innych wypadkach, a więc też np. dla dwóch płaszczyzn równoległych lub dwóch kul nie przecinających się wzajemnie, dany punkt elektryczny posiada *nieskończenie wiele obrazów*, tak iż w odpowiednich rachunkach otrzymujemy szeregi nieskończone, o mniejszym lub większym stopniu zbieżności, zależnie od warunków zadania; lecz i wówczas nawet metoda obrazów elektrycznych jest nader użyteczną, szczególniej gdy chodzi o wartości przybliżone.

Nie odpowiadałoby to celom niniejszej książki (mającej zapoznać czytelnika możliwie tylko z głównemi rysami teoryi elektromagnetyzmu), gdybyśmy chcieli wniknąć tu w szczegóły tego ze wszech miar pięknego i pouczającego przedmiotu. Odsyłam przeto czytelnika do Rozdziału XI cytowanego dzieła Maxwella, w którym znajdzie systematyczny i mnóstwem przykładów ilustrowany wykład „*Teoryi obrazów i inwersyi elektrycznej*".

Zanim jednak porzucimy temat funkcyj kulistych, z których zrodziła się metoda obrazów elektrycznych, dobrze będzie rozważyć w następnym § jeszcze jeden prosty przykład ich zastosowania.

§ 91. ***Przewodnik kulisty w polu jednostajnem.*** —Wyobraźmy sobie, że przewodnik taki, o promieniu R, wprowadzono do pola elektrycznego, które pierwotnie było *jednostajne*, o natężeniu $\mathfrak{E}$; a więc, w języku fizycznym, do pola zawartego między okładkami kondesatora płaskiego, których odległości od środka kuli są *bardzo wielkie* w porównaniu z jej promieniem. Po wprowadzeniu przewodnika, pole to przybierze, po krótkim bardzo czasie, nowy stan równowagi, który mamy znaleść.

Połóżmy oś z przez środek kuli O w kierunku linij siły pierwotnego pola jednostajnego; r, θ niechaj będą spółrzędne biegunowe dowolnego punktu, jak wyżej. W nieobecności przewodnika mielibyśmy, z pominięciem obojętnej zupełnie stałej dodatkowej: $\varphi = -\mathfrak{E}z = -\mathfrak{E}r\cos\theta$; aby więc uwzględnić obecność kuli przewodzącej, położymy znowu, jak w § 89:

$$\varphi = \omega - \mathfrak{E}r\cos\theta. \qquad (a)$$

Jeżeli V jest potencyałem kuli, mamy dla punktów *wewnętrznych* $\omega_w - \mathfrak{E}r\cos\theta = V = \text{const.}$, t. j.

$$\omega_w = V + \mathfrak{E} r \cos\theta = RV.\frac{P_0}{R} + \mathfrak{E}R^2.\frac{rP_1}{R^2};$$

w tym wypadku ω_w jest już samo przez się rozwinięte w szereg według potęg r (a mianowicie r^0, r^1); mamy więc bezpośrednio według (295), dla punktów *zewnętrznych*

$$\omega_z = RV.\frac{P_0}{r} + \mathfrak{E}R^2.\frac{RP_1}{r^2},$$

zaś według (296), dla gęstości ładunku na powierzchni kuli (kładąc znowu $K = 1$):

$$\eta = \frac{V}{R}P_0 + 3\mathfrak{E}P_1 = \frac{V}{R} + 3\mathfrak{E}\cos\theta. \tag{318}$$

Potencyał ostateczny, t. j. zmieniony dzięki obecności kuli, będzie według (a)

$$\varphi_z = \frac{RV}{r} + \mathfrak{E}\frac{R^3 - r^3}{r^2}\cos\theta, \tag{319}$$

dla dowolnego punktu zewnętrznego. Wewnątrz kuli będzie $\varphi = \varphi_w = V = \text{const.}$, skoro założymy, oczywiście, że w ewentualnem wydrążeniu kuli niema żadnych ładunków.

Oznaczając przez E_r, E_θ składowe siły elektrycznej: radyalną, względnie styczną do koła południkowego, w dowolnym punkcie, otrzymamy z (319)

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial\varphi_z}{\partial r} = \dfrac{RV}{r^2} + \mathfrak{E}\left(1 + \dfrac{2R^3}{r^3}\right)\cos\theta \\ E_\theta = -\dfrac{\partial\varphi_z}{r\partial\theta} = \mathfrak{E}\dfrac{R^3 - r^3}{r^3}\sin\theta. \end{cases} \tag{320}$$

Ponieważ $\int P_1 d\sigma = 0$, przeto całkowity ładunek kuli będzie, według (318)

$$Q = 4\pi RV.$$

Jeżeli kula pierwotnie nie była naelektryzowana, mamy też po wprowadzeniu jej do pola $Q = 0$, a więc $V = 0$ (dzięki temu, że odrzuciliśmy na samym początku dowolną stałą dodatkową), tak iż będzie

$$\eta = 3\mathfrak{E}\cos\theta; \tag{318a}$$

tuż przy biegunach kuli rurki elektryczne doznają więc zagęszczenia w stosunku 3 : 1; jedna półkula posiada ładunek dodatni, druga ujemny; linią obojętną jest równik. Według (319) potencyał będzie

$$\varphi_z = -\mathfrak{E}z + \mathfrak{E}R^3 \cdot \frac{P_1}{r^2} \; ; \qquad (319a)$$

pierwszy wyraz odpowiada pierwotnemu polu jednostajnemu; wyraz dodatkowy, który zawdzięczamy obecności kuli, można napisać

$$-\mathfrak{E}R^3 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \; ;$$

odpowiada więc on *podwójnemu* punktowi elektrycznemu (porówn. str. 73) o osi z, umieszczonemu w środku kuli; moment tego punktu podwójnego będzie $4\pi R^3\mathfrak{E}$, t. j. równy potrójnej objętości kuli pomnożonej przez natężenie pierwotnego pola jednostajnego; punkt ten podwójny można uważać jako obraz elektryczny dwóch płaskich jednostajnie naelektryzowanych okładek kondensatora, ograniczających pole jednostajne i bardzo odległych od kuli, w porównaniu z jej promieniem. Istotnie, według wzoru $rr' = R^2$ (318), obrazem każdej z tych płaszczyzn jest środek kuli O, a raczej bardzo mała kulka przechodząca przez O i mająca swój środek na osi z (porówn. Fig. 41); jedna z tych kulek idealnych jest naelektryzowana ujemnie, druga dodatnio; ów „punkt podwójny“ jest granicą, do której zdąża ta para kulek, w miarę gdy odległości płaszczyzn od przewodnika kulistego rosną coraz bardziej w stosunku do jego promienia R.

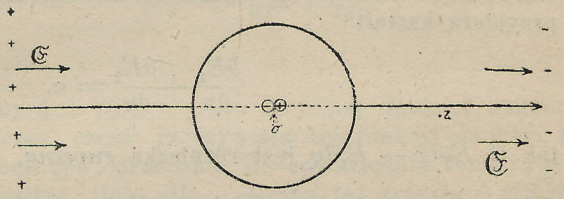


Fig. 41.

§ 92. *Dziedziny „dwuwymiarowe“.* — Jeżeli siła elektryczna jest w każdym punkcie równoległa do danej płaszczyzny, którą możemy obrać jako płaszczyznę x, y, i jeżeli kierunek jej i natężenie zależą jedynie od x, y, nie zaś od z, natenczas mamy tak zwane zagadnienie „dwuwymiarowe“ czyli zagadnienie „w dziedzinie dwuwymiarowej“. Pole takie daje się urzeczywistnić, jeżeli wszystkie przewodniki są bardzo długiemi walcami o tworzącej równoległej do osi z, jeżeli wzajemne ich odległości są stosunkowo małe i jeżeli wreszcie ograniczymy się do rozważania punktów niezbyt bli-

skich krawędzi przewodników. (Porówn. § 81, w którym mieliśmy najprostszy wypadek szczególny takiego pola.)

Potencyał zależy w tym wypadku jedynie od x, y, tak iż równanie Laplace'a redukuje się do

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \tag{321}$$

t. j. do podstawowego równania teoryi funkcyj zmiennej zespolonej. Najogólniejszą jego całką jest $\varphi = f(x+iy) + g(x-iy)$, gdzie f, g są dowolnemi funkcyami swych argumentów.

Oznaczając przez E_1, E_2 składowe siły elektrycznej wzdłuż osi x, y (składowa wzdłuż *osi* z znika, według założenia), mamy

$$E_1=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_2=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ ; \tag{322}$$

warunek solenoidalności $div\,\mathbf{E}=0$, równoważny z równaniem (321), przybiera kształt

$$\frac{\partial E_1}{\partial x}+\frac{\partial E_2}{\partial y}=0,$$

tak iż $E_2dx - E_1dy$ jest różniczką *zupełną*, powiedzmy

$$E_2dx - E_1dy = d\psi, \tag{323}$$

gdzie ψ jest funkcyą położenia punktu w płaszczyznie x, y. Dla $\psi = \text{const.}$ mamy

$$E_1 : E_2 = dx : dy;$$

linie $\psi = const.$ są więc *liniami siły elektrycznej*.

W hydrokinematyce linie $\psi = \text{const.}$ byłyby strugami czyli liniami prądu (skoro przez φ rozumielibyśmy potencyał prędkości, dla cieczy nieściśliwej); stąd też ψ nazywa się *funkcyą prądową* * *(Earnshaw'a)*.

Według (322) i (323) funkcya ta jest związana z potencyałem przez równania

$$E_1=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad E_2=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\ , \tag{324}$$

---

* Jeżeli tak spolszczyć można termin angielski *„current function"*.

które stanowią, jak wiadomo, warunek niezbędny i wystarczający, aby wyraz

$$\zeta = \varphi + i\psi \tag{325}$$

był funkcyą argumentu zespolonego $z = x + iy$. (To „z“ oczywiście nie ma nic wspólnego z równobrzmiącą nazwą trzeciej spółrzędnej kartezyańskiej.)

Według (324) jest $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$; sprawdza się przeto, że linie stałego potencyału są normalne do linij siły. Linie te, czyli—jak je krótko nazwać możemy—linie φ i linie ψ stanowią sieć ortogonalną na płaszczyznie z; linie te, a raczej powierzchnie walcowe, których są śladami, odpowiadają powierzchniom u, v §-fu 82; powierzchnie w są w tym wypadku płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny x, y.

Dla ψ, podobnie jak dla φ, mamy $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$ *, a więc też $\frac{\partial^2\zeta}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = 0$.

Jeżeli położymy $\zeta = f(z)$, t. j. = dowolnej funkcyi zmiennej zespolonej z, natenczas część rzeczywista tej funkcyi da nam potencyał, część urojona (po odrzuceniu i)—odpowiednią funkcyę prądową, a więc wszystkie linie siły. (Można też zresztą ψ uważać jako potencyał, wówczas—φ będzie odpowiednią funkcyą prądową.)

Wszelkie więc zagadnienia rozważanego tu rodzaju przybierają następujący charakter:

Chodzi o znalezienie ζ jako *takiej* funkcyi zmiennej zespolonej z, której część rzeczywista (lub urojona) przybiera wartość *stałą* na pewnych liniach danych, stanowiących ślady *przewodników* walcowych; funkcya ta poza tem ma być ciągła i skończona wraz ze swemi pochodnemi, z wyjątkiem ewentualnych punktów osobliwych, i zachowywać się w pewien sposób w „nieskończoności“, o ile pole jest nazewnątrz nieograniczone, a mianowicie tak, aby całka wyrazu φE wzięta wzdłuż koła o rosnącym bezgranicznie promieniu dążyła do zera.

Ostatecznie chodzi więc o to, co matematycy nazywają *odwzorowaniem podobnem* (w najmniejszych częściach) płaszczyzny z na płaszczyznę ζ.

---

* Oczywiście tam tylko, gdzie niema ładunków, jak to milcząco zakładamy; w tych zresztą miejscach, gdzie $div\ \mathbf{E} \neq 0$, wyraz $E_2dx - E_1dy$ *nie* jest różniczką zupełną, a więc funkcya prądowa nie istnieje; ładunki są więc dla funkcyi prądowej tem, czem są wiry dla potencyału.

Co do przykładów, znajdzie czytelnik cały ich szereg w Rozdz. XII *El. and Mgnt.* Maxwella dalej w każdem dziele poświęconem hydrodynamice, jak np. *Basset'a* (Cambridge, 1888, w Wykładzie XXI klasycznej „Mechaniki" *Kirchhoffa*, wreszcie w licznych rozprawach o charakterze czysto matematycznym. Przekład dotyczących wyników na język elektrostatyki nie sprawi czytelnikowi żadnych trudności.

§ 93. ***Pola osiowo symetryczne.*** — Niechaj oś symetryi pola elektrycznego będzie osią (z) spółrzędnych cylindrycznych; z, ρ, ε niechaj mają takie same znaczenia jak w § 86. Linie siły elektrycznej będą leżały w płaszczyznach południkowych, t. j. w płaszczyznach przechodzących przez oś; potencyał φ będzie zależał tylko od z, ρ, tak iż według (384) będzie

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right). \tag{326}$$

Oznaczając przez E_z, E_ρ składowe siły elektrycznej wzdłuż osi i prostopadle do niej, otrzymamy według (257) i (254):

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad E_\rho = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}$$

i wyraz równoważny ze wzorem (326):

$$div\,\mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\rho E_z) + \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\rho)\right].$$

W punktach pozbawionych ładunku będzie przeto

$\rho(E_\rho dz - E_z d\rho)$ różniczką zupełną, powiedzmy $= d\psi$,

gdzie ψ zależy jedynie od ρ, z. Równaniem *linii siły elektrycznej* będzie więc znowu $\psi = \text{const.}$, aczkolwiek tym razem funkcya ψ ma inne nieco własności, niż w § 92, a mianowicie daje

$$E_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}.$$

Dla odróżnienia od tamtej nazywa się funkcyę tę, szczególniej w hydrodynamice, *funkcyą prądową Stokes'a.*

Zamiast spółrzędnych ρ, z można zresztą łatwo wprowadzić spółrzędne biegunowe lub eliptyczne, lub też inne jakiekolwiek krzywoliniowe, ortogonalne, według wzorów ogólnych §-fu 82, stosownie do danego kształtu przewodników, które oczywiście muszą być bryłami obrotowemi spółosiowemi. W §-fie 91 mieliśmy prosty bardzo

przypadek szczególny pola osiowo symetrycznego; znalezienie odpowiedniej funkcyi Stokes'a i wykreślenie linij elektrycznych $\psi = \text{const.}$ pozostawiam czytelnikowi.

Z omówionych tu własności pól osiowo symetrycznych skorzystamy dopiero znacznie później, przy rozważaniu drgań elektromagnetycznych.

---

§ 94. Przejdźmy teraz do zagadnień elektrostatycznych innego nieco rodzaju, aby jednak zająć się niemi również tylko w ogólnych zarysach. Założymy tym razem nieobecność jakichkolwiek przewodników.

Niechaj będzie dane pole elektrostatyczne $\mathbf{E}_0$ w dielektryku izotropowym i jednorodnym, o spółczynniku K. Do środowiska tego wprowadzamy bryłę dielektryczną, *nienaelektryzowaną*, również izotropową i jednorodną, posiadającą spółczynnik K' różny od K. Wówczas pole elektryczne dozna pewnego zaburzenia i, po krótkim już bardzo czasie, przybierze nowy stan równowagi. Chodzi o znalezienie tego pola odkształconego dzięki wprowadzeniu bryły, t. j. o wyznaczenie wektora $\mathbf{E}$ dla każdego punktu środowiska oraz dla wnętrza samej bryły.

Zagadnienia tego rodzaju przedstawiają trudności matematyczne również wielkie, jeżeli nie większe, niż problematy „rozmieszczenia", omówione poprzednio. Istotnie też zdołano je rozwiązać w kilku jedynie wypadkach szczególnych.

Podobnie jak w tamtych zagadnieniach można i tu uważać pole ostateczne $\mathbf{E}$ jako superpozycyę pola pierwotnego i pola odpowiadającego ładunkowi pozornemu „wzbudzonemu" na powierzchni bryły dielektrycznej, — a stanowi to jądro metody *Poissona*, stosowanej do analogicznych zupełnie problematów magnetycznych.

Połóżmy tedy

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{X} = -\nabla\varphi_0 - \nabla\omega, \tag{327}$$

gdzie wektor $\mathbf{X}$ wyraża owo pole dodatkowe, nieznane, ω jego potencyał skalarny, zaś φ_0 potencyał (dany) pola pierwotnego.

Niechaj $d\tau'$ będzie elementem objętości bryły dielektrycznej, σ jej powierzchnią, ν normalną zwróconą nazewnątrz; wielkości dotyczące wnętrza bryły zaopatrzymy w akcenty, o ile to będzie niezbędne.

Zakładamy, że pole pierwotne jest solenoidalne w tej mianowicie dziedzinie, do której wprowadzono bryłę, t. j. że

$$div\,\mathbf{E}'_0 = 0, \quad (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_0')\nu = 0. \tag{328}$$

Wówczas będzie $div\,\mathbf{X} = 0$ w całej przestrzeni i sam wektor $\mathbf{X}$ będzie ciągłym wszędzie z wyjątkiem powierzchni σ. Ładunek *prawdziwy* (wewnętrzny i powierzchniowy) bryły, pierwotnie nienaelektryzowanej, nadal też, t. j. po wprowadzeniu jej do pola, równa się zeru. Dla punktów powierzchni σ będzie przeto

$$0 = \nu(K\mathbf{E} - K'\mathbf{E}') = \nu(K\mathbf{E}_0 - K'\mathbf{E}'_0 + K\mathbf{X} - K'\mathbf{X}')$$

czyli, według (328):

$$(a) \qquad (K\mathbf{X} - K'\mathbf{X}')\nu + (K - K')\,\mathbf{E}_0'\nu = 0.$$

Ładunek powierzchniowy *pozorny* będzie natomiast różny od zera; oznaczając gęstość jego, jak zwykle, przez η', t. j. kładąc $\eta' = (\mathbf{E} - \mathbf{E}')\nu$ czyli, ze względu na (328), $\eta' = (\mathbf{X} - \mathbf{X}')\nu$, otrzymamy według (a)

$$(b) \qquad \eta' = \frac{K'-K}{K}(\mathbf{X}' + \mathbf{E}'_0)\nu = \frac{K'-K}{K}\,\mathbf{E}'\nu.$$

Ponieważ jest to jedyny ładunek pola dodatkowego $\mathbf{X}$, przeto dla potencyału tego pola, t. j. dla „potencyału dodatkowego“ ω otrzymamy

$$\omega = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\eta'}{r}\,d\sigma,$$

gdzie r jest odległością dowolnego punktu (zewnętrznego lub wewnętrznego) od elementu powierzchni $d\sigma$. Podstawmy tu za η' wyraz (b) i zważmy, że $div\,\mathbf{E}' = 0$, a więc $\int \frac{\mathbf{E}'\nu}{r}d\sigma = \int \mathbf{E}'\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)d\tau'$; wówczas otrzymamy

$$(329) \qquad \omega = \frac{K'-K}{4\pi K}\int \mathbf{E}'\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)d\tau',$$

gdzie całka obejmuje wnętrze bryły dielektrycznej; jeżeli x', y', z' są spółrzędnemi dowolnego jej elementu $d\tau'$, zaś x, y, z spółrzędnemi punktu, w którym panuje potencyał dodatkowy ω, mamy $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$ i operator Hamiltona ∇' dotyczy zmiennych x', y', z', t. j. $\nabla' = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z'}$.

We wzorze tym $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 + \mathbf{X}'$ nie jest znane, tak iż ω nadal pozostaje niewiadomą zagadnienia. Ta jednak postać potencyału dodatkowego nadaje się w *pewnych* wypadkach do istotnego obliczenia jego wartości, jak to niebawem na znanym przykładzie zobaczymy.

Godną uwagi, chociażby tylko ze względów historycznych, jest następująca interpretacya elementów powyższej całki. Oznaczając

przez ds' element długości w kierunku $\mathbf{E}'$ i biorąc jako element objętości część rurki elektrycznej o przekroju $d\sigma'$ i długości ds', mamy

$$(\mathbf{E}'\nabla')\left(\frac{1}{r}\right)d\tau = E'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\right)ds'.d\sigma'.$$

Możemy przeto zdać sprawę z potencyału ω, a więc też z pola dodatkowego $\mathbf{X}$, twierdząc, że bryła dielektryczna jest „spolaryzowana“, t. j. że wzdłuż rurek siły mamy łańcuchy cząstek $d\tau'$, z których każda posiada na jednym swym końcu czyli „biegunie“ ładunek pozorny $-\frac{K'-K}{4\pi K}E'd\sigma'$ czyli ładunek prawdziwy

$$-\frac{K'-K}{4\pi K}D'd\sigma' \quad (\text{gdzie } D' = K'E'),$$

na drugim zaś końcu czyli biegunie ładunek równy i wprost przeciwny. W każdym łańcuchu mamy naprzemian bieguny ujemne i dodatnie, przyczem biegun dodatni jednego elementu styka się z biegunem ujemnym następnego, tak iż wszystkie owe ładunki „znoszą się wzajemnie“ wewnątrz bryły, a pozostają tylko ładunki, i to w naszym wypadku pozorne, na powierzchni bryły. Ładunki cząstek wewnętrznych są więc ostatecznie fikcyami matematycznemi, skoro tylko zechcemy uważać samą bryłę dielektryczną jako przestrzennie ciągłą. Były one czemś więcej niż fikcyą w teoryach molekularnych, o których tu jednak mówić nie zamierzamy. W historyi nauki omówione tu stosunki odegrały szczególnie ważną rolę w zastosowaniu do zjawisk *magnetycznych;* zamiast K mamy wówczas przenikliwość magnetyczną μ, zamiast E siłę magnetyczną M, zamiast cząstek biegunowo naelektryzowanych—magnesy elementarne. O analogiach zresztą i różnicach między Elektro- a Magnetostatyką w dalszym ciągu będzie mowa.

§ 95. *Elipsoid dielektryczny w polu* $(\mathbf{E}_0)$ *jednostajnem.* — Niechaj pole pierwotne będzie jednostajne, t. j.

$$\mathbf{E}_0 = \mathfrak{E}\mathbf{a}\ , \tag{330}$$

gdzie $\mathfrak{E}$ jest stałym skalarem wyrażającym natężenie tego pola, zaś $\mathbf{a}$ wektorem jednostkowym wskazującym kierunek linij siły, a więc również stałym. Potencyał φ_0 będzie w tym wypadku funkcyą liniową długości mierzonej w kierunku $\mathbf{a}$.

Otóż, aby otrzymać możliwie najprostsze stosunki, załóżmy, że pole dodatkowe jest *wewnątrz bryły dielektrycznej również jednostajne*, t. j.

$$\mathbf{X}' = X'\mathbf{x} \tag{331}$$

gdzie X' jest stałym skalarem, zaś $\mathbf{x}$ stałym wektorem jednostkowym, o kierunku, który mamy dopiero znaleść.

Założenie to możliwe jest tylko przy *pewnym kształcie* bryły dielektrycznej τ'; natychmiast zobaczymy, przy *jakim* mianowicie.

Istotnie, skoro pole pierwotne i pole dodatkowe wewnątrz bryły mają być jednostajne, pole *wypadkowe*

$$\mathbf{E}' = \mathfrak{C}\mathbf{a} + X'\mathbf{x} \tag{332}$$

również będzie *jednostajne wewnątrz* τ'. Otrzymamy przeto według (329), uwzględniając, że $(\mathbf{E}'\nabla')^1/r = -(\mathbf{E}'\nabla)^1/r$, i pisząc dla skrócenia $\frac{K'-K}{K} = \gamma$:

$$\omega = -\gamma.\mathbf{E}'\nabla\Psi, \tag{333}$$

gdzie

$$\Psi = \int \frac{d\tau'}{4\pi r}\ ; \tag{334}$$

Ψ jest więc potencyałem ładunku o gęstości jednostajnej $=1$, wypełniającego całą objętość bryły.

Lecz wektor $\mathbf{X}'$ ma być stały, t. j. potencyał jego ω ma być funkcyą liniową spółrzędnych x, y, z; według (333) musi więc być Ψ *funkcyą kwadratową* zmiennych x, y, z wewnątrz bryły τ'. Bryła ta musi więc mieć postać *elipsoidu.* *

Kładąc osie spółrzędnych x, y, z wzdłuż osi głównych elipsoidu dielektrycznego, mamy dla punktów *wewnętrznych*

$$\Psi' = N' - \tfrac{1}{2}(A'x^2 + B'y^2 + C'z^2), \tag{335'}$$

zaś dla punktów *zewnętrznych*

$$\Psi = N - \tfrac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2), \tag{335}$$

gdzie

$$N' = \tfrac{1}{4}abc\int_0^\infty \frac{du}{F(u)},\quad A' = \tfrac{1}{2}abc\int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)F(u)}, \text{ i t. d.} \tag{336'}$$

---

* Porówn. jakiekolwiek dzieło specyalne o teoryi potencyału newtonowskiego lub też Mechanikę Kirchhoffa, Wykład XVIII. W rozumowaniach tego §-fu wzorowałem się na przepysznem dziele *Emila Cohna: Das elektromagnetische Feld.* Lipsk, 1900. Cohn posługuje się zresztą językiem kartezyańskim

$$N = \tfrac{1}{4} abc \int_u^\infty \frac{du}{F(u)}, \quad A = \tfrac{1}{2} abc \int_u^\infty \frac{du}{(a^2+u)\,F(u)}, \text{ i t. d.,} \tag{336}$$

$$F(u) = \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)},$$

dolna granica u całek (336) jest pierwiastkiem dodatnim równania

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1,$$

a więc pierwszą spółrzędną eliptyczną oznaczoną tak samo w § 83; a, b, c są półosiami elipsoidu dielektrycznego, którego powierzchni odpowiada więc wartość $u = 0$.

Spółczynniki N, A, ... nazewnątrz bryły są tedy w ogóle zmienne, a przybierają wartości stałe jedynie na elipsoidach spółognisko-wych $u = \text{const.}$

Spółczynniki wewnętrzne N', A' i t. d. są natomiast *stałe* i zależą tylko od stosunków osi a, b, c. Jeżeli $a > b > c$, natenczas jest

$$0 < A' < B' < C' < 1. \tag{337}$$

Ze względu na stałość spółczynników N', A' i t. d. otrzymamy tedy, oznaczając składowe siły $\mathbf{E}'$ wzdłuż osi przez E_1', E_2', E_3', według (333) i (335′):

$$\omega' = \gamma(A'E_1'x + B'E_2'y + C'E_3'z),$$

stąd zaś $X_1' = -\frac{\partial \omega'}{\partial x} = -\gamma A'E_1'$, a więc według (332)

$$E_1' = \mathfrak{E}_1 - \gamma A'E_1', \text{ i t. d.}$$

t. j.

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{i}\mathfrak{E}_1}{1+\gamma A'} + \frac{\mathbf{j}\mathfrak{E}_2}{1+\gamma B'} + \frac{\mathbf{k}\mathfrak{E}_3}{1+\gamma C'}. \tag{338}$$

Wzór ten wyznacza pole ostateczne *wewnętrzne* w zależności od pola pierwotnego (którego składowe oznaczyliśmy przez $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$), od stałej γ a więc od stosunku spółczynników $K' : K$ i wreszcie od A', B', C', t. j. od postaci elipsoidu dielektrycznego. Ze wzoru tego widzimy, że kierunek linij elektrycznych prostych wewnątrz elipsoidu jest w ogóle różny od kierunku linij w polu pierwotnem, chyba że elipsoid staje się kulą. Dla dowolnego elipsoidu kierunki te są identyczne wówczas tylko, gdy linie pola pierwotnego są równoległe do jednej z osi głównych.

(Dla $K' = K$, czyli dla $\gamma = 0$, mamy $\mathbf{E}' = \mathbf{i}\mathfrak{E}_1 + \mathbf{j}\mathfrak{E}_2 + \mathbf{k}\mathfrak{E}_3 = \mathbf{E}_0$, jak być powinno; wówczas oczywiście $\omega = 0$.)

Co do pola *zewnętrznego*, odkształconego dzięki obecności elipsoidu, mamy według (313) i (338):

$$(339) \qquad \omega = -\gamma\left[\frac{\mathfrak{E}_1}{1+\gamma A'}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\mathfrak{E}_2}{1+\gamma B'}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\mathfrak{E}_3}{1+\gamma C'}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right],$$

skąd możemy obliczyć $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{X} = \mathbf{E}_0 - \nabla\omega$, skoro podstawimy Ψ według (335) i (336). Ponieważ N, A i t. d. są zmienne w przestrzeni, linie elektryczne nazewnątrz elipsoidu będą w ogóle *krzywe*, natężenie zaś pola będzie różne w różnych punktach; tylko w odległościach bardzo wielkich w stosunku do rozmiarów bryły dielektrycznej pole zachowa w przybliżeniu swój pierwotny charakter jednostajny.

Dla $K' : K = \infty$ mamy $\gamma = \infty$, a więc według (338) $E' = 0$; pole wewnętrzne znika; bryła o spółczynniku dielektrycznym bardzo wielkim w porównaniu ze spółczynnikiem środowiska zachowuje się więc jak *przewodnik;* dla pola zewnętrznego będzie wówczas według (339)

$$(339a) \qquad \omega = -\left[\frac{\mathfrak{E}_1}{A'}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\mathfrak{E}_2}{B'}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\mathfrak{E}_3}{C'}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right],$$

gdzie Ψ jest wciąż jeszcze $= \int \frac{d\tau'}{4\pi r}$. Wzór ten daje więc potencyał dodatkowy dla przewodnika elipsoidalnego wprowadzonego do pola pierwotnie jednostajnego.

Aby obliczyć działanie mechaniczne pola na elipsoid dielektryczny, zestawmy energię U pola ostatecznego z energią U_0 pola pierwotnego. Praca mechaniczna przy dowolnem przesunięciu bryły tej będzie $\delta W = -\delta U$, skoro tylko wszelkie ładunki pola pozostaną niezmienne. Gdyby było $K' = K$, mielibyśmy $U = U_0$ i energia U_0 nie doznałaby na skutek przesunięcia bryły żadnej zmiany; założyliśmy bowiem, że bryła ta jest nienaelektryzowana, a gdy posiadałaby jeszcze ten sam spółczynnik co środowisko, przesuwanie jej w przestrzeni w niczem w ogóle nie zmieniłoby pola. Możemy przeto napisać

$$(340) \qquad \delta W = -\delta(U - U_0).$$

Otóż, różnica tych energij daje się, przy pomocy wzoru (338), w dogodnej wyrazić postaci.

Istotnie, mamy $U = \frac{1}{2}\sum\varphi e$, $U_0 = \frac{1}{2}\sum\varphi_0 e_0$, gdzie sumy (lub całki) obejmują wszystkie ładunki; lecz dzięki temu, że bryła miała

być nienaelektryzowana, ładunki ostateczne są identyczne z pierwotnemi; możemy więc napisać

$$U = \tfrac{1}{2}\sum \varphi e_0 = \tfrac{1}{2}\sum \varphi \, div\, \mathbf{D}_0 . d\tau = -\tfrac{1}{2}\int \nabla\varphi . \mathbf{D}_0 d\tau = \tfrac{1}{2}\int \mathbf{E}\mathbf{D}_0 d\tau$$

i podobnie $U_0 = \tfrac{1}{2}\sum \varphi_0 e = \tfrac{1}{2}\int \mathbf{E}_0\mathbf{D} d\tau$,

gdzie $\mathbf{D}$ jest polaryzacyą elektryczną w polu ostatecznem, $\mathbf{D}_0$ — w pierwotnem, całki zaś obejmują całą przestrzeń. Mamy więc

$$U - U_0 = \tfrac{1}{2}\int (\mathbf{E}\mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0\mathbf{D}) d\tau ,$$

co zresztą stosuje się ogólnie do dwóch pól irotacyjnych posiadających te same ładunki. Lecz w naszym wypadku jest nazewnątrz bryły τ': $\mathbf{D}_0 = K\mathbf{E}_0$, $\mathbf{D} = K\mathbf{E}$, a więc $\mathbf{E}\mathbf{D}_0 = \mathbf{E}_0\mathbf{D}$, tak iż pozostaje tylko całka obejmująca *wnętrze* bryły; ponieważ zaś tu jest $\mathbf{D}_0 = K\mathbf{E}_0$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}' = K'\mathbf{E}'$, przeto mamy

$$U - U_0 = \tfrac{1}{2}(K - K')\int \mathbf{E}'\mathbf{E}_0 d\tau' ;$$

lecz obadwa wektory pod całką są stałe wewnątrz elipsoidu; oznaczając przeto objętość jego przez τ', otrzymamy

$$U - U_0 = \tfrac{1}{2}(K - K')\tau' . \mathbf{E}_0\mathbf{E}' ,$$

t. j. ostatecznie, według (338) i pamiętając, że $\mathbf{E}_0 = i\mathfrak{E}_1 + j\mathfrak{E}_2 + k\mathfrak{E}_3$:

$$U - U_0 = \tfrac{1}{2}(K - K')\left[\frac{\mathfrak{E}_1^2}{1+\gamma A'} + \frac{\mathfrak{E}_2^2}{1+\gamma B'} + \frac{\mathfrak{E}_3^2}{1+\gamma C'}\right]\tau' . \quad (341)$$

Wyraz ten nie doznaje żadnej zmiany przy przesunięciu postępowem, a zmienia się jedynie przy przesunięciu obrotowem elipsoidu; na bryłę tę działa więc jedynie *para sił*, której moment można natychmiast obliczyć według (341). Na każdą inną bryłę (nienaelektryzowaną) działałaby w polu pierwotnie jednostajnem również tylko para sił.

Elipsoid obrotowy. — Jeżeli np. $b = c$, mamy również $C' = B'$, a oznaczając przez θ kąt zawarty między osią a i kierunkiem pierwotnej siły elektrycznej:

$$U - U_0 = \tfrac{1}{2}(K - K')\mathfrak{E}^2\left[\frac{\cos^2\theta}{1+\gamma A'} + \frac{\sin^2\theta}{1+\gamma B'}\right]\tau' . \quad (342)$$

Biorąc pochodną tego wyrazu ze względu na θ, ze znakiem ujemnym, otrzymamy odpowiednią „siłę ponderomotoryczną“ Θ, t. j. moment pary sił starającej się zwiększyć kąt θ:

$$(343)\quad \Theta = \tfrac{1}{2} K \mathfrak{E}^2 \tau' \cdot \left[\frac{1}{B' + {}^1/\gamma} - \frac{1}{A' + {}^1/\gamma}\right] \sin 2\theta, \quad \text{gdzie } \gamma = \frac{K'}{K} - 1.$$

Jeżeli $a > b$, mamy, jak w (337)

$$B' > A' > 0.$$

Niezależnie więc od znaku γ, t. j. niezależnie od tego czy K' jest większe czy też mniejsze od K, moment Θ jest *ujemny* dla $\theta < \frac{\pi}{2}$.

Elipsoid obrotowy wydłużony będzie więc dążył do ustawienia swej osi w kierunku pierwotnego pola jednostajnego, niezależnie od tego, czy posiada on spółczynnik dielektryczny *większy* czy też *mniejszy*, niż otaczające go środowisko. To samo dotyczy więc *przewodnika* o postaci elipsoidu wydłużonego; mamy wówczas $\gamma = \infty$, a więc według (343)

$$(343a)\qquad \Theta = \tfrac{1}{2} K \mathfrak{E}^2 \tau' \cdot \left(\frac{1}{B'} - \frac{1}{A'}\right) \sin 2\theta.$$

Jeżeli $a < b = c$, mamy elipsoid obrotowy *spłaszczony*; w tym wypadku jest $B' < A'$. Jeżeli spłaszczenie jest bardzo znaczne, mamy *krążek* niemal płaski; odrzucając drugą i wyższe potęgi stosunku $\frac{a}{b}$, mamy w tym wypadku

$$(344)\qquad B' = \frac{\pi}{4}\frac{a}{b}, \quad A' = 1 - \frac{\pi}{2}\frac{a}{b};$$

podstawiając spółczynniki te do (342), (343), otrzyma więc czytelnik wzory dla krążka dielektrycznego o promieniu b i o grubości $2a$ (w środku krążka) bardzo małej w porównaniu z tym promieniem; kładąc zaś $\gamma = \infty$, otrzyma wzory dla *przewodnika* o tejże postaci.

Zauważmy jeszcze, że czynnik stały $\frac{1}{2} K \mathfrak{E}^2 \tau'$ w powyższych wzorach dla momentu Θ wyraża energię pierwotnie zawartą w tej części przestrzeni, którą zajmuje bryła dielektryczna, względnie przewodnik.

Pozostawiając czytelnikowi dyskusyę różnych wypadków szczególnych jako temat do własnych ćwiczeń, rozważę tylko, w następnym paragrafie, wypadek najprostszy $a = b = c$, to jest *kulę* di-

elektryczną; dostarczy nam to bowiem najlepszej sposobności do pewnych pouczających uwag.

§ 95a. *Kula dielektryczna w polu jednostajnem.* — Kładąc $a = b = c = R$, mamy $u = r^2 - R^2$, $F(u) = r^3$, a więc według (336′) i (336):

$$\left.\begin{aligned} N' &= \tfrac{1}{2}R^2,\ A' = B' = C' = \tfrac{1}{3} \\ N &= \tfrac{1}{2}\frac{R^3}{r},\ A = B = C = \tfrac{1}{3}\frac{R^3}{r^3} \end{aligned}\right\} \qquad (345)$$

a więc według (335′) i (335):

$$\Psi' = \tfrac{1}{2}(R^2 - \tfrac{1}{3}r^2);\quad \Psi = \tfrac{1}{3}\frac{R^3}{r}. \qquad (346)$$

W tym zresztą wypadku możemy najłatwiej obliczyć Ψ wprost, według określenia (334); istotnie, nazewnątrz kuli mamy $\nabla^2\Psi = 0$, wewnątrz zaś $\nabla^2\Psi' = -1$, t. j. (ponieważ funkcya ta zależy oczywiście tylko od r), według (286): $\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}) = 0$, $\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\Psi'}{\partial r}) = -r^2$, a więc

$$\Psi = \frac{\alpha}{r} + \beta;\ \Psi' = -\tfrac{1}{6}r^2 - \frac{\gamma}{r} + \delta,$$

gdzie α, β, γ, δ są stałe; lecz dla $r = \infty$ ma być $\Psi = 0$, a więc $\beta = 0$; dla $r = 0$ ma być Ψ' skończone, a więc $\gamma = 0$, tak iż

$$\Psi = \frac{\alpha}{r};\ \Psi' = -\tfrac{1}{6}r^2 + \delta;$$

dla $r = R$ wreszcie ma być $\Psi = \Psi'$, $\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\partial\Psi'}{\partial r}$, a więc

$$\alpha = \tfrac{1}{3}R^3,\ \delta = \tfrac{1}{2}R^2,$$

tak iż ostatecznie $\Psi = \frac{1}{3}R^3/r$, $\Psi' = \frac{1}{2}(R^2 - \frac{1}{3}r^2)$, jak w (346).

Skorzystajmy pomimo to z (345): podstawiając mianowicie $A' = B' = C' = \frac{1}{3}$ do (338) i pisząc znowu $\mathbf{i}\mathfrak{E}_1 + \mathbf{j}\mathfrak{E}_2 + \mathbf{k}\mathfrak{E}_3 = \mathbf{E}_0 = \mathfrak{E}\mathbf{a}$, otrzymamy pole *wewnętrzne*

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + \frac{1}{3}\gamma},\ \text{gdzie}\ \gamma = \frac{K'}{K} - 1. \qquad (347)$$

Pole ostateczne wewnątrz kuli będzie więc miało kierunek pola pierwotnego, lecz inne natężenie; jeżeli $K' > K$, natężenie to będzie *mniejsze*, jeżeli natomiast $K' < K$, natężenie to będzie *większe* od pierwotnego.

Dla pola *zewnętrznego* otrzymamy, według (333) i (347), potencyał dodatkowy

$$\omega = -\frac{\gamma}{1+\frac{1}{3}\gamma}\,\mathbf{E}_0\nabla\Psi\,;$$

lecz według (346) jest

$$-\nabla\Psi = \tfrac{1}{3}\frac{R^3}{r^2}\mathbf{r}\,,$$

zaś $\mathbf{E}_0\mathbf{r} = \mathfrak{E}\cos\theta$, skoro przez θ rozumieć będziemy kąt zawarty między $\mathbf{r}$ i liniami siły pola pierwotnego; potencyał dodatkowy będzie więc

$$\omega = \frac{\gamma\mathfrak{E}R^3}{3+\gamma}\,\frac{\cos\theta}{r^2}\,; \tag{348}$$

dodając potencyał pola pierwotnego $\varphi_0 = -\mathfrak{E}z$ (gdzie z jest długością mierzoną w kierunku pierwotnych linij elektrycznych od środka kuli), otrzymamy cały potencyał $\varphi = -\mathfrak{E}z + \omega$, stąd zaś ostatecznie pole zewnętrzne $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ odkształcone dzięki obecności kuli dielektrycznej.

Kładąc $\gamma = \infty$, wracamy do poprzednio już rozważonego wypadku *przewodnika* kulistego; wówczas jest według (348) $\omega = \mathfrak{E}R^3\frac{\cos\theta}{r^2} = \mathfrak{E}R^3\frac{P_1}{r^2}$, a więc istotnie jak w § 91, (319a).

Dla różnicy energij pola ostatecznego i pola pierwotnego mieliśmy w § 95

$$U - U_0 = \tfrac{1}{2}(K-K')\tau'.\mathbf{E}_0\mathbf{E}'\,;$$

według (347) będzie więc

$$U - U^0 = \tfrac{1}{2}(K-K')\tau'\,\frac{\mathfrak{E}^2}{1+\frac{1}{3}\gamma}$$

czyli

$$U - U_0 = -\tfrac{1}{2}K\mathfrak{E}^2\tau'.\,\frac{3(K'-K)}{K+2K} = -\frac{3(K'-K)}{K+2K}\,U_0'\,, \tag{349}$$

w szczególności zaś dla *przewodnika* kulistego ($\gamma = \infty$):

$$U - U_0 = -3\,\frac{K\mathfrak{E}^2\tau'}{2} = -3\,U_0'\,, \tag{349a}$$

gdzie U_0' jest energią elektryczną tej części pola pierwotnego, którą zajęła kula.

Wyraz (349) jest stały, tak iż przy dowolnem przesunięciu wirtualnem będzie według (340) $\delta W = 0$.

Na kulę pierwotnie nienaelektryzowaną, dielektryczną lub przewodzącą, wprowadzoną do pola jednostajnego, nie działają więc żadne siły, t. j. ani siła wypadkowa, *ani też para sił*, co ze względu na zupełną symetryę kuli było do przewidzenia.

Jeżeli spółczynniki K i K' są prawie równe, tak iż γ jest bardzo małą liczbą, dodatnią lub ujemną, natenczas mamy

$$U - U_0 = \tfrac{1}{2}(K - K')\mathfrak{E}^2\tau' \qquad (350)$$

według (349) lub też zresztą, dla *każdego elipsoidu*, według (341). Wzór ten zachodzi również, w przybliżeniu, jeżeli pole pierwotne nie jest ściśle jednostajne, lecz doznaje nieznacznych zmian w dziedzinie τ'; da się to łatwo urzeczywistnić, jeżeli rozmiary bryły są stosunkowo małe. Na bryłę taką działa więc według (340) siła ponderomotoryczna

$$\frac{\tau'}{2}(K' - K).\nabla(\mathfrak{E}^2) \qquad (351)$$

starająca się wprawić ją w ruch postępowy, mianowicie w kierunku *najszybszego wzrostu* natężenia pola $\mathfrak{E}$, jeżeli $K' > K$, zaś w kierunku *wprost przeciwnym*, skoro $K' < K$; wielkość tej siły mechanicznej jest proporcyonalna do objętości bryły dielektrycznej, do różnicy spółczynników $K' - K$ i wreszcie do szybkości spadku lub wzrostu *kwadratu natężenia pola;* nie zależy natomiast zgoła od kierunku i postaci linij siły elektrycznej.

Pamiętajmy jednak, że wzór ten, słynny od czasów Maxwella, jest jedynie *przybliżony*, i to z dwóch względów, jak widzieliśmy przed chwilą. Jeżeli warunek przybliżonej jednostajności trwa nadal, lecz spółczynniki K, K' różnią się znacznie od siebie, natenczas we wzorze (351) siły ponderomotorycznej należy, według (349), zastąpić różnicę tych spółczynników $K' - K$ przez zawilszy nieco wyraz:

$$3K\frac{K' - K}{K' + 2K} \qquad (352)$$

a mianowicie dla *kuli* dielektrycznej, stosunkowo małej. Dla *przewodnika* kulistego otrzymamy według (349a) siłę ponderomotoryczną:

$$3\frac{\tau'}{2}K\nabla(\mathfrak{E}^2). \qquad (353)$$

Kulka metalowa, pozbawiona własnego ładunku, dąży więc od miejsc mniejszego do miejsc większego natężenia pola; tak samo zachowują się kulki lub w ogóle małe bryłki dielektryczne o spół-

czynniku większym niż spółczynnik środowiska. Jeżeli bryłka jest naelektryzowana, mamy dodatkową jeszcze siłę mechaniczną, o której wielokrotnie już była mowa.

Pole magnetostatyczne.

§ 96. Wiemy już, że warunkiem niezbędnym i wystarczającym dla takiego pola jest *irotacyjność siły magnetycznej:*

$$\text{curl}\,\mathbf{M} = 0, \tag{354}$$

przynajmniej dla wszystkich ciał lub środowisk, dla których ważne są równania elektromagnetyczne $\mathbf{p} = c.\,\text{curl}\,\mathbf{M}$, $\mathbf{q} = -c.\,\text{curl}\,\mathbf{E}$ lub chociażby tylko pierwsze z tych równań.

Zobaczymy niebawem, że warunek (354) nie może być spełniony w całej przestrzeni, chyba że $M = 0$ wszędzie; że więc w pewnych jej dziedzinach, wewnątrz lub na powierzchni tak zwanych magnesów właściwych („trwałych“) muszą istnieć wiry magnetyczne. Jest to koniecznym wynikiem nieistnienia „magnetyzmu prawdziwego“,—co stanowi najbardziej może charakterystyczną różnicę między stroną magnetyczną a elektryczną rozważanych w książce tej zjawisk.

Zanim jednak zajmiemy się różnicami, zobaczmy, w krótkim przeglądzie, jakie są analogie.

W tym celu rozważmy przedewszystkiem pewną dziedzinę τ pola magnetostatycznego, w której warunek irotacyjności jest wszędzie spełniony, t. j. w której niema żadnych wirów magnetycznych, ani przestrzennych, ani powierzchniowych.

W każdym punkcie dziedziny τ siła $\mathbf{M}$ posiadać będzie potencyał skalarny; bez obawy o nieporozumienie możemy go znowu oznaczyć przez φ, a więc napisać

$$\mathbf{M} = -\nabla\varphi\ ; \tag{355}$$

φ nazywa się *potencyałem magnetostatycznym* lub, krócej, *magnetycznym*.

Gdyby dziedzina τ była cykliczną, potencyał φ mógłby być funkcyą wielowartościową położenia, t. j. całka siły magnetycznej wzdłuż obwodu zamkniętego i przebiegającego całkowicie wewnątrz τ mogłaby być różna od zera. Jeżeli jednak dziedzina ta jest *acykliczna*, natenczas całka $\int \mathbf{M} ds$ znika dla każdego obwodu s zamkniętego, przebiegającego całkowicie w tej dziedzinie; wówczas więc potencyał φ jest *jednowartościową* funkcyą położenia. Taką własność posiada pole *zewnętrzne* odpowiadające jednemu lub kilku nieruchomym magnesom trwałym, naturalnym lub sztucznym; nazewnątrz

tych ciał istnieje wszędzie potencyał magnetyczny jednowartościowy. Takie to pole magnetyczne, które może utrzymywać się niezmiennie „samo przez się“, czyli bez doprowadzania energii zzewnątrz, w ciągu czasu dowolnie długiego, nazywa się właściwie *statycznem*, w odróżnieniu od owych pól magnetycznych w ogóle *stacyonarnych* („stacyonarnych“) czyli niezmiennych w czasie, które otaczają prądy elektryczne w obwodach metalowych, a dla których utrzymania konieczne jest ciągłe doprowadzanie energii, połączone z przekształcaniem się jej na ciepło w substancyi samych obwodów. W polach niezmiennych *tego* rodzaju istnieje, nazewnątrz obwodów, potencyał magnetyczny wielowartościowy. Otóż o polach takich w następnym dopiero Rozdziale będzie mowa, podczas gdy w niniejszym będziemy mieli na myśli zawsze tylko pola właściwie magneto*statyczne*.

§ 97. Potencyał magnetyczny odpowiada elektrycznemu, podobnie jak siła **M** odpowiada sile **E**. Linie siły magnetycznej są normalne do powierzchni $\varphi = \text{const.}$; określenia linij, rurek i komórek magnetycznych są zupełnie analogiczne do elektrycznych.

Podobnie jak elektryczny, możemy też wyrazić potencyał magnetyczny przez $div\,\mathbf{M}$, przez skok $(\mathbf{M}' - \mathbf{M})\nu$ składowej normalnej siły i przez skok samego potencyału $\varphi - \varphi'$ na pewnych powierzchniach, zupełnie jak w § 68, byle tylko *nazewnątrz magnesów*, w których może być $curl\,\mathbf{M} \neq 0$. Ostatecznie wypada nam oprzeć się na wzorze (134) wyprowadzonym we *Wstępie*, str. 71. Zakładając, że wszystkie magnesy są zebrane w dziedzinie skończonej i że w odległościach r bardzo wielkich siła magnetyczna maleje jak r^{-2}, a więc φ jak r^{-1}, i zaliczając powierzchnie σ_m wszelkich (dla bezpieczeństwa) magnesów do granic dziedziny τ, będziemy mieli dla dowolnego punktu tej dziedziny:

$$(356)\quad 4\pi\varphi = \int \frac{div\,\mathbf{M}}{r}\,d\tau + \int \frac{(\mathbf{M}' - \mathbf{M})\nu}{r}\,d\sigma + \int (\varphi - \varphi')\,\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

$$+ \int \left[\varphi \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\,\mathbf{M}\nu\right] d\sigma_m.$$

Interpretacya poszczególnych wyrazów wymagałaby poprostu tylko powtórzenia tego, cośmy powiedzieli w § 68 lub we Wstępie. Rolę elektryczności pozornej obejmują tu *magnetyzmy pozorne* o gęstości przestrzennej

$$div\,\mathbf{M},$$

względnie o gęstości powierzchniowej

$$(\mathbf{M}' - \mathbf{M})\nu.$$

Każda powierzchnia nieciągłości samego potencyału jest równoważna „warstwie podwójnej“, czyli tak zwanej *lameli* magnetycznej nieskończenie cienkiej, o momencie równym skokowi potencyału $\varphi - \varphi'$. Potencyał φ jest więc taki, jak gdyby każda „cząsteczka“ dm' magnetyzmu pozornego, rozmieszczonego przestrzennie lub powierzchniowo dostarczała w odległości r wyrazu

$$\frac{dm'}{4\pi r},$$

któremu odpowiada siła magnetyczna elementarna $-\frac{dm'}{4\pi} \nabla \frac{1}{r}$,

a więc radyalna i posiadająca natężenie

$$\frac{dm'}{4\pi r^2}.$$

Znowu więc wchodzi tu w grę „prawo odwrotnych kwadratów“, w zwykłym swym charakterze.

Każdemu elementowi $d\sigma_m$ powierzchni magnesu lub w ogóle jakiejkolwiek bryły, którą należy wykluczyć z dziedziny całkowania przestrzennego, lub którą „dla wszelkiej pewności“ pragniemy wykluczyć, odpowiada w potencyale φ, według (356), wyraz elementarny

$$\frac{1}{4\pi} \left[\varphi \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \mathbf{M}\nu\right] d\sigma_m, \tag{357}$$

gdzie ν jest normalną *zwróconą ku dziedzinie* τ. Dla obliczenia pola zewnętrznego możemy więc abstrahować od istnienia podobnych brył, uważając jednak powierzchnię σ_m każdej z nich jako superpozycyę warstwy podwójnej o momencie φ i warstwy pojedyńczej magnetyzmu swobodnego o gęstości $\mathbf{M}\nu$, gdzie φ i $\mathbf{M}\nu$ są wartościami potencyału i składowej normalnej siły magnetycznej w punktach zewnętrznych położonych tuż przy powierzchni σ_m.

Co do własności specyficznych różnych ciał, przypomnijmy sobie z Rozdziału I-go, że określenie przenikliwości μ było zupełnie analogiczne do określenia spółczynnika dielektrycznego K. Polaryzacyi elektrycznej $\mathbf{D} = K\mathbf{E}$ odpowiada tedy polaryzacya magnetyczna $\mathbf{B} = \mu\mathbf{M}$. W wypadku anizotropii spółczynnik μ, podobie jak K, będzie operatorem wektorowym liniowym (w przybliżeniu), tak iż kierunki $\mathbf{M}$ i $\mathbf{B}$ będą w ogóle różne.

Energia dowolnego pola magnetycznego jest

$$U = \tfrac{1}{2} \int \mathbf{MB} d\tau, \tag{358}$$

gdzie całkowanie obejmuje *całą* przestrzeń. Wyraz ten daje się przekształcić podobnie jak wyraz energii elektrycznej w §-fie 69; uczynimy to jednak dopiero po podkreśleniu pewnej wybitnej różnicy między polem elektrycznem a magnetycznem. Aż dotąd bowiem chodzi nam jeszcze o analogie między jednem a drugiem.

Wysiłmagnetyczny, z którego obliczają się działania ponderomotoryczne, jest według § 55:

$$\mathfrak{f}_\nu = \mathfrak{M}(\mathfrak{B}\nu) - \tfrac{1}{2}\nu(\mathfrak{M}\mathfrak{B}) \; ; \qquad \text{(VIIm)}$$

zależność jego od wektorów $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$ jest zupełnie taka sama jak zależność wysiłu elektrycznego od $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$. Różnice w zastosowaniu okażą się niebawem. Oznaczając przez u gęstość energii magnetycznej, napiszemy krócej

$$\mathfrak{f}_\nu = \mathfrak{M}(\mathfrak{B}\nu) - \tfrac{1}{2}\nu u. \qquad \text{(VIIm)}$$

Treść tego wzoru omówiliśmy już w Rozdziale III; podkreślenie podobieństwa roli rurek magnetycznych i elektrycznych byłoby już tu zbytecznem.

§ 98. Po skonstatowaniu analogij zwrócimy się teraz ku pewnej, wspomnianej już kilkakrotnie, a najbardziej może zasadniczej różnicy między polem elektrycznem a magnetycznem. Dotyczy ona rozmieszczenia wektorów $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$. (Porówn. Rozdz. I.)

Podczas gdy $div\,\mathfrak{D}$ może być różne od zera i składowa normalna $\mathfrak{D}\nu$ może być nieciągła, rozmieszczenie polaryzacyi *magnetycznej* jest *czysto solenoidalne w całej przestrzeni*, t. j.: mamy wszędzie, a nawet wewnątrz magnesów i na ich powierzchni:

$$div\,\mathfrak{B} = 0, \quad (\mathfrak{B}' - \mathfrak{B})\nu = 0. \qquad (359)$$

„Magnetyzm prawdziwy“ *nie* istnieje, czyli, innemi słowy, *każda rurka polaryzacyi magnetycznej jest zamknięta w sobie*. Rurki biegnące obustronnie w nieskończoność można uważać jako wypadek graniczny rurek zamkniętych bardzo rozległych.

Istnieje natomiast magnetyzm *pozorny*, lecz jedynie tylko w ciałach niejednorodnych lub anizotropowych lub też wreszcie na powierzchni dwóch ciał o różnej przenikliwości. Gęstości jego: przestrzenna ε' i powierzchniowa ζ', są w wypadku izotropii określone przez wzory (20), § 7, Rozdz. I. Rola magnetyzmów pozornych odzwierciedla się we wzorze (356).

Przypomnijmy sobie zresztą, że równość $\mu'\mathfrak{M}'\nu = \mu\mathfrak{M}\nu$, czyli $(\mathfrak{B}' - \mathfrak{B})\nu = 0$, służyła nam właściwie za określenie stosunku przenikliwości magnetycznej stykających się ciał (Rozdz. I). Wówczas powiedzieliśmy też, że tylko składowa normalna $\mathfrak{M}\nu$ doznaje skoku u powierzchni granicznej, że natomiast składowa *styczna* $\mathfrak{M}\Theta$ pozostaje *ciągłą;* przypominając sobie treść § 63, musimy tu jednak

zauważyć, że jest to słuszne w braku „sił przyłożonych“, a więc dla wszelkich ciał *z wyjątkiem tych, które są namagnesowane wewnętrznie, a więc z wyjątkiem magnesów*, właściwie tak zwanych. Najlepszy w tym względzie przykład mamy chociażby w magnesie solenoidalnym, który rozważaliśmy w związku ze sprawą lokalizacyi energii, w § 40. W substancyi takiego magnesu wszystkie linie siły biegną podłużnie, podczas gdy w przestrzeni zewnętrznej siła magnetyczna znika wszędzie, jeżeli solenoid jest zamknięty; jeżeli zaś jest otwarty, znika tuż przy jego pobocznicy w punktach zewnętrznych stosunkowo odległych od „biegunów“. Po stronie wewnętrznej powierzchni bocznej solenoidu siła magnetyczna jest całkowicie styczna, t. j. $\mathbf{M}\Theta = M$, po stronie zaś zewnętrznej mamy $\mathbf{M}\Theta = 0$; skok składowej $\mathbf{M}\Theta$ równa się więc poprostu natężeniu M pola wewnętrznego.

Dla wszystkich ciał natomiast, które nie są namagnesowane „wewnętrznie“, a zawierają linie magnetyczne czasowo tylko, podczas gdy znajdują się w polu otaczającem jakiś układ magnesów (lub też prądów elektrycznych), dla wszystkich tych ciał, nazywanych *magnetycznie sprężystemi* *, warunek ciągłości składowej $\mathbf{M}\Theta$ jest zawsze spełniony.

Tyle co do składowej stycznej siły. Ciągłość natomiast *składowej normalnej polaryzacyi magnetycznej* jest, aby to raz jeszcze powtórzyć, zachowana w każdym wypadku, bez żadnego wyjątku, o ile można sądzić z doświadczenia. Obecność sił magnetycznych przyłożonych w niczem własności tej nie zmienia.

Otóż, rozmieszczenie doskonale solenoidalne wektora $\mathbf{B}$ w całej przestrzeni prowadzi do wniosku, o którym wyżej już wspomniano. Aby otrzymać go, obliczmy energię magnetyczną $\frac{1}{2}\int \mathbf{MB}d\tau$ dla jakiejkolwiek rurki polaryzacyi magnetycznej o przekroju poprzecznym $d\sigma$ nieskończenie małym; ponieważ moment $Bd\sigma$ jest stały wzdłuż całej rurki, otrzymamy

$$\tfrac{1}{2}Bd\sigma\int \mathbf{M}ds\ .$$

gdzie całka rozciąga się wzdłuż obwodu *zamkniętego* s, a mianowicie wzdłuż linii centralnej tej rurki. Energia całego pola będzie sumą podobnych wyrazów, wziętą dla wszystkich rurek polaryzacyi. Otóż, gdyby rozmieszczenie siły magnetycznej było czysto irotacyj-

* Lub *miękkiemi*, z odmiennym nieco odcieniem treści; ciała natomiast, z których można uczynić magnesy trwałe lub w przybliżeniu trwałe, nazywają się magnetycznie *twardemi*.

ne, t. j. gdyby *curl* **M** = o *w całej* przestrzeni, mielibyśmy $\int \mathbf{M} ds = o$ i energia każdej rurki, a więc też energia magnetyczna U całego pola byłaby równą zeru. Ponieważ zaś U jest sumą dodajników zasadniczo dodatnich, każdy z nich znikałby zosobna; mielibyśmy więc dla każdego punktu przestrzeni $M = o$, $B = o$. Innemi słowy: pole magnetyczne nie istniałoby zgoła. (Porównaj zresztą *Wstęp*, str. 62.)

W pewnych więc dziedzinach każdego pola magnetycznego muszą istnieć wiry magnetyczne, czy to przestrzenne czy też powierzchniowe.

W polach właściwie *statycznych* siedliskiem tych wirów będzie *wnętrze albo też powierzchnia magnesów.*

Stąd też np. wynika bezpośrednio, że w polu należącem do *jedynego* tylko magnesu wszystkie rurki polaryzacyi będą przeszywały jego substancyę, t. j. że nie istnieje ani jedna rurka, któraby przebiegała całkowicie nazewnątrz magnesu.

Ponieważ tedy wewnątrz magnesów jest w ogóle *curl* **M** $\neq$ o, przeto pierwsze główne równanie elektromagnetyczne $\mathbf{p} = c.\ curl\ \mathbf{M}$ nie może być prawdziwem dla tych ciał. Jak już wspomniałem w § 62, należy je dla magnesów uogólnić czyli uzupełnić, odejmując mianowicie od wektora **M** inny wektor **m**, tak dobrany, aby w stanie równowagi było wszędzie

$$curl\ (\mathbf{M} - \mathbf{m}) = o. \qquad (360)$$

Będzie tak istotnie, jeżeli zgodzimy się na równanie (A′) $\mathbf{p} = c.curl(\mathbf{M} - \mathbf{m})$, § 61. Wektor **m** będzie stanowił przykład siły przyłożonej, a mianowicie t. zw. *siłę magnetyzacyi wewnętrznej*. Analogiczną siłę przyłożoną „elektryzacyi wewnętrznej“ **e** należałoby przyjąć dla dielektryków niezupełnie „sprężystych“; pole *elektrostatyczne* może atoli istnieć bez takich ciał, a więc bez siły przyłożonej **e**; posiada ono bowiem rozbieżności czyli ładunki prawdziwe, przestrzenne lub powierzchniowe. Pole *magnetostatyczne* natomiast ze względu na brak magnetyzmów prawdziwych bez siły przyłożonej **m** obejść się nie może; bądź co bądź, w magnetostatyce uwzględnienie siły przyłożonej stanowi sprawę istotną, podczas gdy w elektrostatyce odpowiednia siła **e** byłaby przygodną.

Według (360) wektor zredukowany **M** — **m**, czyli tak zwana „siła pola“ posiada wszędzie potencyał jednowartościowy, powiedzmy φ; możemy więc napisać dla dowolnego już punktu całej przestrzeni

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} - \nabla\varphi. \qquad (361)$$

Sam wektor **m** nie posiada, w ogóle, potencyału wewnątrz magnesów; gdzieindziej będzie jednak *curl* **M** = o i *curl* **m** = o, tak iż

w polu zewnętrznem będzie można położyć $\mathfrak{m} = 0$, a tylko *w samych magnesach* $\mathfrak{m} \neq 0$. Nazewnętrz magnesów φ będzie identyczne z funkcyą, którą poprzednio tak samo oznaczyliśmy i której przysługuje wzór (356).

§ 99. Ponieważ całka wyrazu

$$d\tau.\mathfrak{B}(\mathfrak{M} - \mathfrak{m}) = -\mathfrak{B}.\nabla\varphi d\tau$$

znika dla każdej rurki polaryzacyi magnetycznej, przeto energię całkowitą pola magnetostatycznego, określoną przez (358), można też wyrazić pod postacią całki obejmującej wnętrze magnesów

(358a) $$U = \tfrac{1}{2}\int \mathfrak{m}\mathfrak{B}d\tau ,$$

tak jak gdyby same tylko magnesy były siedliskiem energii. Zresztą, ponieważ nazewnątrz magnesów jest $\mathfrak{m} = 0$, można też całkę tę rozciągnąć do wszystkich elementów przestrzeni.

We wzorze tym jest już zawarte przekształcenie wyrazu energii magnetycznej analogiczne do przekształcenia uskutecznionego na str. 243 dla energii pola elektrostatycznego. Istotnie, podstawiając (361) do (358), mielibyśmy

$$U = \tfrac{1}{2}\int \mathfrak{m}\mathfrak{B}d\tau - \tfrac{1}{2}\int \mathfrak{B}\nabla\varphi d\tau ;$$

lecz $\int \mathfrak{B}\nabla\varphi d\tau = -\int \varphi.div\,\mathfrak{B}.d\tau - \int \varphi(\mathfrak{B}' - \mathfrak{B})\nu d\sigma = 0$, ze względu na (359); pozostaje więc pierwszy tylko wyraz, jak w (358a). Ostatecznie przeprowadzony tu krótki rachunek jest co do treści swej identyczny z rozumowaniem użytem na początku niniejszego paragrafu.

Innych możliwych przekształceń wyrazu energii magnetycznej, nie bacząc na doniosłe ich znaczenie historyczne, nie przytaczam tu umyślnie, aby nie gmatwać lub też nie zaciemniać pojęć zasadniczych.

§ 100. Powiedzieliśmy już kilkakrotnie, że składowa normalna polaryzacyi magnetycznej jest zawsze ciągła. Podkreślmy teraz to, co już wspomniano w Rozdziale I, § 8, a mianowicie, że własność ta ogólna zawiera też w sobie ów fakt specyalny, że rurki polaryzacyi magnetycznej nie urywają się, to jest nie zaczynają ani też nie kończą się na powierzchni żadnego ciała. Innemi słowy: *po stronie magnetycznej nie istnieje nic analogicznego do przewodników elektrycznych.*

Powierzchnia stałego potencyału magnetycznego nie posiada już więc tak doniosłego znaczenia faktycznego jak powierzchnia izopotencyalna w polu elektrostatycznem, którą zawsze można utożsamić z powierzchnią przewodnika.

Ten brak analogii magneto-elektrycznej nie ogranicza się zresztą do pól statycznych. Widzieliśmy już bowiem, przy omawianiu własności ogólnych pola zmiennego w czasie, że nie istnieje też analogia magnetyczna prądu elektrycznego przewodzonego.

§ 101. *Siła ponderomotoryczna* na jednostkę objętości ciała *izotropowego* będzie w polu magnetostatycznem, według (VI'). § 64 i 46:

$$\mathbf{P} = -\tfrac{1}{2} M^2 \nabla \mu - V\mathbf{B}\, curl\, \mathbf{m}.$$

Nazewnątrz magnesów mamy pierwszy tylko wyraz, który zupełnie odpowiada elektrycznemu $-E^2 \nabla K$; w ciałach jednorodnych wyraz ten znika.

Drugi wyraz daje działanie mechaniczne pola magnetycznego na elementy *magnesu;* ponieważ nie zależy on od samej siły przyłożonej $\mathbf{m}$, lecz tylko od jej *curla,* napiszmy dla skrócenia

$$curl\, \mathbf{m} = \mathbf{n} \; ; \tag{362}$$

wówczas będzie

$$\mathbf{P} = -\tfrac{1}{2} M^2 \nabla \mu + V\mathbf{nB}. \tag{363}$$

Jeżeli substancya magnesu jest *jednorodna,* pierwszy wyraz znika i pozostaje siła mechaniczna, na jednostkę objętości:

$$\mathbf{P} = V\mathbf{nB}$$

normalna do wektora $\mathbf{n}$ i do polaryzacyi magnetycznej $\mathbf{B}$. Według (362) wektor $\mathbf{n}$ jest tak związany ze siłą przyłożoną magnetyzacyi jak prąd elektryczny ze swem polem magnetycznem; magnes zachowuje się więc, pod względem pola zewnętrznego, które „wytwarza“ *, i pod względem działań mechanicznych, których doznaje, jak gdyby był siedliskiem prądów elektrycznych. Tkwi w tem jądro słynnej teoryi „prądów molekularnych“ *Ampère'a.* **

---

* Widzieliśmy już bowiem poprzednio, w § 62, że $curl\, \mathbf{m}$ należy uważać za właściwe źródło pola magnetycznego.

** Co do szczegółów teoryi *Anpère'a* i teoryi indukcyi magneto-elektrycznej prądów molekularnych *Webera* patrz *El. and Mgnt. Maxwella,* T. II, Rozdz. XXII ostatniej Części.

Idąc za przykładem Heaviside'a i innych autorów, możemy nazwać wektor $\mathbf{n}$ prądem elektrycznym fikcyjnym lub krócej *prądem fikcyjnym*, co do kierunku i natężenia.

Zaznaczmy, że magnes *nie pod każdym względem* jest równoważny prądowi lub układowi prądów elektrycznych rzeczywistych; do przedmiotu tego powrócimy zresztą w ciągu dalszym.

Mamy jeszcze uwzględnić *powierzchnie graniczne*. Siłę mechaniczną $\mathbf{S}$, na jednostkę takiej powierzchni, można obliczyć bądź to z wysiłu magnetycznego (VIIm), według wzoru (213)

$$\mathbf{S} = \mathbf{f}_\nu - \mathbf{f}'_\nu = \mathbf{M}(\mathbf{B}\nu) - \mathbf{M}'(\mathbf{B}'\nu) - \nu(u - u') ,$$

bądź też według (363), uważając powierzchnię graniczną za warstwę przejściową o malejącej aż do zera grubości.

Ponieważ magnetyzm prawdziwy nie istnieje, t. j. $\mathbf{B}\nu = \mathbf{B}'\nu$ zawsze i wszędzie, przeto mamy dla powierzchni granicznej dwóch dowolnych ciał

$$\mathbf{S} = (\mathbf{M} - \mathbf{M}')\,(\mathbf{B}\nu) - \nu(u - u') , \tag{364}$$

gdzie u, u' oznaczają gęstości energii po jednej i drugiej stronie.

Jeżeli obadwa ciała są *izotropowe*, o przenikliwościach μ, μ' i jeżeli *żadne z nich nie jest magnesem*, natenczas mamy, zupełnie jak w § 73 i przy tem samem znaczeniu symbolu θ:

$$\mathbf{S}_0 = \nu[u\cos 2\theta - u'\cos 2\theta] ; \tag{365}$$

siła ta jest normalna do powierzchni granicznej. Znaczek $_0$ ma wskazywać na to, że żadne z ciał nie jest magnesem, t. j. że $\mathbf{m} = 0$ po jednej i drugiej stronie.

Niechaj teraz jedno ze stykających się ciał, a mianowicie to, któremu odpowiadają symbole akcentowane, będzie *magnesem;* innemi słowy, niechaj magnes znajduje się w środowisku magnetycznie sprężystem, a więc np. w powietrzu. Wówczas ze wzoru (364) nie wynika już (365), albowiem składowa styczna siły magnetycznej jest nieciągła u powierzchni granicznej. Po jednej stronie, w substancyi magnesu, jest w ogóle $\mathbf{m} \neq 0$, po drugiej $\mathbf{m} = 0$; oznaczając więc przez $\mathbf{T}$ część styczną wektora $\mathbf{m}$, co do kierunku i natężenia, mamy według § 63:

$$\mathbf{M} - \nu(\mathbf{M}\nu) = \mathbf{M}' - \nu(\mathbf{M}'\nu) - \mathbf{T}$$

czyli

$$\mathbf{M} - \mathbf{M}' = \nu[\nu(\mathbf{M} - \mathbf{M}')] - \mathbf{T} ,$$

a podstawiając do (364) otrzymamy:

$$\mathbf{S} = \nu\left\{\ \nu(\mathbf{M} - \mathbf{M}').(\mathbf{B}\nu) - (u - u')\ \right\} - \mathbf{T}(\mathbf{B}\nu).$$

Pierwsza część tej siły jest normalna, druga styczna do powierzchni magnesu; pierwsza nie zależy zgoła od $\mathbf{m}$, a więc będzie identyczna z wyrazem (365) dla S_0, o czem łatwo się przekonać, powtarzając jota w jotę rachunek zastosowany w § 73. Mamy więc:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 - \mathbf{T}(\mathbf{B}\nu) , \qquad (366)$$

gdzie ν jest normalną do powierzchni magnesu zwróconą *ku* środowisku magnetycznie sprężystemu. Siła mechaniczna dodatkowa, którą zawdzięczamy magnetyzacyi wewnętrznej, jest więc *styczna* do powierzchni magnesu i posiada mianowicie kierunek $\mathbf{T}$. We wszystkich tych miejscach, gdzie wektor $\mathbf{m}$ jest normalny do powierzchni magnesu, siła dodatkowa znika i pozostaje tylko $\mathbf{S}_0$. Tam zaś, gdzie wektor $\mathbf{m}$ jest styczny do powierzchni, mamy $\mathbf{T} = \mathbf{m}$, tak iż dodatkowa siła mechaniczna staje się wprost równą $-\mathbf{m}(\mathbf{B}\nu)$.

Według wzoru (12), podanego we *Wstępie* (str. 16), mamy $\mathrm{V}\nu\mathrm{V}\mathbf{BT} = (\nu\mathbf{T})\mathbf{B} - \mathbf{T}(\mathbf{B}\nu)$; lecz $\nu\mathbf{T} = 0$; możemy więc zamiast (366) napisać:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathrm{V}\nu\mathrm{V}\mathbf{BT}.$$

Ten sam wynik otrzymalibyśmy przez zastosowanie wzoru (363) do „warstwy przejściowej“ o grubości dążącej do zera; istotnie, jak widzieliśmy we *Wstępie* (str. 66), skok składowej stycznej jest równoważny warstwie wirowej nieskończenie cienkiej, a więc w naszym wypadku prądowi fikcyjnemu powierzchniowemu; uwzględniając to, czytelnik sam okaże zaznaczoną identyczność wyników. Dogodniejszą w zastosowaniu jest zresztą pierwotna postać (366) siły mechanicznej powierzchniowej.

§ 102. Zagadnienia dotyczące odkształcenia danego pola magnetycznego przez bryłę *magnetycznie sprężystą*, jak np. bryłę miękkiego żelaza, i rozmieszczenia linij magnetycznych wewnątrz samej bryły, a znane pod nazwą problematów „indukcyi magnetycznej“ lub — „wzbudzonego magnetyzmu“, są zupełnie podobne do zagadnień elektrycznych, rozważonych w §§ 94, 95, 95a. Zastępując we wzorach tych §§-ów wielkości $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, K przez $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, μ, otrzymamy odpowiednie wzory magnetyczne.

Czyniąc to np. we wzorach §-fu 95 otrzyma czytelnik wzory dla elipsoidu z miękkiego żelaza wprowadzonego do pola magnetycznego jednostajnego, np. w próżni lub w powietrzu. Tłumacząc na język magnetyczny treść §-fu 95a, otrzymamy np. dla kuli pełnej sporządzonej z materyału magnetycznie sprężystego, wprowadzonej do pola jednostajnego $\mathbf{M}_0$ o natężeniu $\mathfrak{M}$, które roztacza się w próżni lub, co prawie na jedno wychodzi, w powietrzu ($\mu = 1$), według (349):

$$(367) \qquad U - U_0 = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}^2\tau' \cdot \frac{3(\mu'-1)}{\mu'+2};$$

we wzorze tym τ' jest objętością kuli, μ' jej przenikliwością magnetyczną, U_0 energią magnetyczną pola pierwotnego, U energią pola odkształconego dzięki wprowadzeniu kuli.

Jeżeli pole pierwotne jest w przybliżeniu tylko jednostajne, a promień kuli stosunkowo mały (w znaczeniu wyrazów objaśnionem w § 95a), natenczas działa na kulę siła ponderomotoryczna

$$(368) \qquad \mathbf{P}\tau' = \frac{\tau'}{2}\,\frac{3(\mu'-1)}{\mu'+2}\,\nabla(\mathfrak{M}^2)$$

starająca się wprawić ją w ruch postępowy. Kula *paramagnetyczna* ($\mu' > 1$) *dąży ku miejscom większego natężenia* $\mathfrak{M}$, kula *diamagnetyczna* ($\mu' < 1$) posiada dążność *wprost przeciwną*, niezależnie zresztą od kierunku i kształtu linij magnetycznych. Jeżeli μ' jest nieznacznie tylko różne od jedności, co z wyjątkiem żelaza, stali, niklu i kobaltu zachodzi dla wszystkich ciał paramagnetycznych i bez wyjątku dla wszystkich diamagnetycznych, możemy napisać $\mu'+2 = 3$, a więc

$$\mathbf{P}\tau' = \frac{\tau'}{2}(\mu'-1)\,\nabla(\mathfrak{M}^2);$$

wzór ten przybliżony zachodzi zresztą dla małej bryłki o kształcie dowolnym; każda więc bryłka diamagnetyczna lub lekko paramagnetyczna zachowuje się (w powietrzu) tak jak gdyby na jednostkę jej objętości przypadała siła mechaniczna

$$(368a) \qquad \mathbf{P} = \tfrac{1}{2}(\mu'-1)\,\nabla(\mathfrak{M}^2).$$

Bryłka więc diamagnetyczna ucieka od „bieguna“ magnesu, zarówno od północnego jak południowego; bryłka zaś paramagnetyczna dąży ku jednemu lub drugiemu.

Ponieważ tedy problematy „indukcyi magnetycznej“ są zupełnie analogiczne do omówionych poprzednio zagadnień elektrostatycznych, przeto nie będziemy tu dłużej zatrzymywać się nad tym przedmiotem. Zwrócimy się natomiast do zagadnień magnetycznych innego rodzaju, które omówimy w ogólnych zarysach, aby dać następnie ich ilustracyę na przykładach najprostszych lameli i solenoidu.

§ 103. *Niechaj będzie dana siła przyłożona magnetyzacyi wewnętrznej* $\mathbf{m}$ *dla każdego magnesu; chodzi o znalezienie odpowiedniego pola magnetycznego* $\mathbf{M}$.

Zadanie to nie dopuszcza dwóch różnych rozwiązań. Istotnie, gdyby $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ były rozwiązaniami, mielibyśmy $\mathbf{M}_1 = \mathbf{m} - \nabla\varphi_1$,

$\mathbf{M}_2 = \mathbf{m} - \nabla\varphi_2$, a więc $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = -\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)$, tak iż byłoby *w całej przestrzeni* $curl\,(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) = 0$ i składowa styczna wektora $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ byłaby wszędzie ciągła; innemi słowy, pole magnetyczne $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ byłoby czysto irotacyjne; lecz, jak widzieliśmy w § 98, pole takie znika, a więc $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$ wszędzie, co było do dowiedzenia.

Dla jednoznacznego określenia pola wystarczyłoby zresztą podanie samych tylko wirów siły przyłożonej czyli „prądów fikcyjnych“ $\mathbf{n} = curl\,\mathbf{m}$ dla każdego magnesu; do powyższego rozumowania nie wchodzą bowiem same siły przyłożone, lecz tylko ich wiry. Własność ta była już omawiana ogólniej w Rozdziale III.

Wyrazimy teraz potencyał skalarny φ wektora $\mathbf{M} - \mathbf{m}$ przez całkę przestrzenną obejmującą elementy samego magnesu.

Niechej magnes, ograniczony powierzchnią σ, znajduje się w środowisku jednorodnem i izotropowem o przenikliwości μ; substancya magnesu niechaj również będzie izotropową i jednorodną, o przenikliwości μ'. Wówczas będzie nazewnątrz magnesu $div\,\mathbf{M} = 0$, a więc $\nabla^2\varphi = 0$, zaś wewnątrz magnesu $div\,\mathbf{M}' = 0$, t.j. $\nabla^2\varphi' = div\,\mathbf{m}$; ponieważ zaś sama funkcya φ jest ciągła, przeto, czyniąc zwykłe założenie co do sposobu zachowywania się jej w nieskończoności, otrzymamy

$$4\pi\varphi = -\int \frac{1}{r} div\,\mathbf{m}.d\tau' - \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \frac{\partial\varphi'}{\partial\nu}\right)d\sigma\ ,$$

gdzie $d\tau'$ jest elementem objętości magnesu, ν — normalną zewnętrzną do jego powierzchni; w całce powierzchniowej φ dotyczy strony zewnętrznej, φ' zaś strony wewnętrznej tej powierzchni. Ponieważ składowa normalna polaryzacyi magnetycznej jest ciągła, mamy $\mu\mathbf{M}\nu = \mu'\mathbf{M}'\nu$, czyli

$$-\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \mu'\mathbf{m}\nu - \mu'\frac{\partial\varphi'}{\partial\nu}\ ;$$

z drugiej strony mamy, zakładając, że wektor $\mathbf{m}$ jest ciągły wewnątrz magnesu:

$$\int \frac{1}{r} div\,\mathbf{m}d\tau' = \int \frac{1}{r}\,\mathbf{m}\nu d\sigma - \int \mathbf{m}\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)d\tau'\ , \qquad (a)$$

a więc:

$$4\pi\varphi = \int \mathbf{m}\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)d\tau' + \left(\frac{\mu'}{\mu} - 1\right)\int \left(\mathbf{m}\nu - \frac{\partial\varphi'}{\partial\nu}\right)\frac{\partial\sigma}{r}\ ;$$

lecz $\mathfrak{m}\nu - \frac{\partial\varphi'}{\partial\nu} = (\mathfrak{m} - \nabla\varphi')\nu = \mathfrak{M}'\nu$; całka powierzchniowa będzie więc

$$(b) \qquad \int \frac{\mathfrak{M}'\nu}{r}\, d\sigma = \int div\,(\frac{\mathfrak{M}'}{r})\, d\tau' = \int \mathfrak{M}'\nabla'(\frac{1}{r})d\tau' ,$$

albowiem $div\,\mathfrak{M}' = o$; mamy więc ostatecznie funkcyę φ w żądanej postaci:

$$(369) \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{m}\nabla'(\frac{1}{r})d\tau' + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mu' - \mu}{\mu}\,\mathfrak{M}'\nabla'(\frac{1}{r})d\tau'.$$

We wzorze tym obie całki należy rozciągnąć do wnętrza magnesu lub magnesów, jeżeli jest ich kilka. Pierwsza całka zawiera daną siłę przyłożoną, tak iż można wartość jej bezpośrednio obliczyć; druga całka zawiera natomiast nieznaną siłę magnetyczną $\mathfrak{M}' = \mathfrak{m} - \nabla\varphi$. Oznaczmy pierwszą całkę przez Φ, drugą przez ω, napiszmy więc $\varphi = \Phi + \omega$.

Gdyby było $\mu' = \mu$, mielibyśmy

$$\omega = o, \text{ a więc } \varphi = \Phi.$$

Widzimy stąd, że ω jest „potencyałem dodatkowym“ odpowiadającym tej okoliczności, że część przestrzeni τ', a mianowicie siedlisko sił przyłożonych $\mathfrak{m}$, zawiera substancyę o przenikliwości μ' zamiast μ. Znalezienie tej funkcyi dodatkowej ω stanowi przeto omówiony już poprzednio problemat „indukcyi magnetycznej“, czyli problemat „magnetyzmu wzbudzonego“. Interpretacya poszczególnych elementów całki

$$\omega = \frac{\mu' - \mu}{4\pi\mu}\int \mathfrak{M}'\nabla'(\frac{1}{r})d\tau'$$

jest zupełnie taka sama jak dla doskonale analogicznego wyrazu elektrycznego (329), § 94. Podobnie też daje się interpretować potencyał „pierwotny“ (że tak powiem), t. j.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{m}\nabla'(\frac{1}{r})d\tau'.$$

Każda cząstka magnesu $d\tau' = d\sigma'.ds'$ * zachowuje się jak magnes elementarny, którego „bieguny“ posiadają magnetyzmy (pozorne,

---

* gdzie ds' jest elementem długości w kierunku $\mathfrak{m}$, a więc $d\tau'$ częścią rurki siły przyłożonej o długości ds' i o przekroju $d\sigma'$.

według powyższej nomenklatury) $m d\sigma'$, względnie $-m d\sigma'$; przez m rozumiem tu natężenie wektora $\mathfrak{m}$. *Moment* takiego magnesu elementarnego jest, co do wielkości i kierunku, $\mathfrak{m} d\sigma' . ds' = \mathfrak{m} d\tau'$; moment na jednostkę objętości będzie więc poprostu równy $\mathfrak{m}$; wielkość skalarna tego momentu na jednostkę objętości, czyli to, co zwykle nazywa się *natężeniem namagnesowania trwałego* lub *wewnętrznego*, jest tedy identyczna z natężeniem siły przyłożonej; stąd też nazwa „siły przyłożonej magnetyzacyi wewnętrznej“ udzielona wektorowi $\mathfrak{m}$. Historycznie porządek pojęć nie był taki jak w niniejszym wykładzie, lecz wprost odwrotny; co do klasycznego sposobu przedstawienia rzeczy, odsyłam czytelnika do II-go tomu Maxwella *El. & Mgnt.*, Rozdz. I.

Jeżeli przenikliwość otoczenia jest różna od przenikliwości samego magnesu (a w zwykłych warunkach, a więc dla magnesu stalowego w powietrzu, różnica ta jest *bardzo* znaczna), natenczas do Φ należy dodać ω. Moment „magnesu elementarnego„ na jednostkę objętości, będzie wówczas

$$\mathfrak{m} + \frac{\mu' - \mu}{\mu} \mathfrak{M}' .$$

Wyraz dodatkowy

$$\frac{\mu' - \mu}{\mu} M'$$

nazywa się natężeniem *magnesowania wzbudzonego*, dla dowolnej zresztą substancyi, a więc też dla magnetycznie sprężystej, z której trwałego magnesu uczynić nie można. Jeżeli otoczenie stanowi powietrze lub próżnia ($\mu = 1$), mamy $(\mu' - 1) M'$, a stosunek wyrazu tego do natężenia siły magnetycznej M' panującej w danym punkcie bryły, t. j.

$$\varkappa = \mu' - 1$$

nazywa się *spółczynnikiem magnetyzacyi wzbudzonej* lub krótko *spółcz. magnetyzacyi.* *

---

* Rozpowszechnioną jest też nazwa „*susceptibility*“ (angl.), „*Susceptibilität*“ (niem.). Spółczynnik tak nazywany i oznaczany zawsze przez $\varkappa$ różni się zresztą od powyższego o czynnik stały $\frac{1}{4\pi}$; znajdujemy więc powszechnie niemal $\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$; osławiony jednak przez Heaviside'a czynnik „ $\frac{1}{4\pi}$ “ opuszczamy konsekwentnie w całej tej książce, idąc za przykładem tego autora, który znalazł już posłuch u wielu specyalistów.

Nie należy zresztą zapominać, że przenikliwość, a więc też spółczynnik magnetyzacyi, nie są bynajmniej stałe, lecz zmieniają się wraz ze siłą magnetyczną, i to w stopniu bardzo znacznym, szczególniej dla ciał istotnie ważnych, a więc dla gatunków żelaza i stali, zarówno „magnetycznie twardych“ jak i magnetycznie miękkich czyli sprężystych. *

Korzystając z przekształceń (a), (b), wyraziliśmy powyżej funkcyę φ w postaci (369) głównie ze względu na znaczenie historyczne odpowiedniej interpretacyi; skorzystajmy teraz z (a), (b) w kierunku odwrotnym i napiszmy:

$$(369a) \qquad 4\pi\varphi = -\int \frac{div\,\mathfrak{m}}{r}\,d\tau' + \int \frac{\mathfrak{m}_\nu}{r}\,d\sigma + \frac{\mu'-\mu}{\mu}\int \frac{\mathfrak{M}'_\nu}{r}\,d\sigma\ ;$$

pierwsza całka obejmuje tu wnętrze magnesu, dwie pozostałe—jego powierzchnię. Wzór ten, którego wysłowienie pozostawiam czytelnikowi, jest o tyle naturalniejszy od (369), że stosunek przenikliwości występuje w nim jedynie jako czynnik *tych* wyrazów, które dotyczą powierzchni granicznej ciał posiadających różne te przenikliwości. Ostatecznie są to sprawy o formalnem czysto znaczeniu.

§ 104. Powiadamy, że dana bryła jest *namagnesowana solenoidalnie*, jeżeli wektor $\mathfrak{m}$ w całem jej wnętrzu jest solenoidalny, a więc jeżeli jego składowa normalna jest ciągła i

$$(370) \qquad div\,\mathfrak{m} = 0.$$

Oznaczmy przez Φ, jak w § 103, część potencyału, która pozostaje przy pominięciu różnicy przenikliwości magnesu i jego otoczenia; wówczas będzie, według (369a), dla magnesu solenoidalnego

$$(371) \qquad \Phi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{m}_\nu}{r}\,d\sigma\ ,$$

tak jak gdyby „magnetyzm“ był rozpostarty jedynie na *powierzchni* magnesu; wzór ten zachodzi zarówno dla punktów zewnętrznych jak i wewnętrznych; gęstość powierzchniowa magnetyzmu równa się poprostu składowej normalnej siły przyłożonej $\mathfrak{m}_\nu$. Magnes taki daje się rozłożyć na tak zwane *solenoidy magnetyczne*, t. j. na włókna dowolnie cienkie, stanowiące rurki siły przyłożonej; moment

* Co do szczegółów dotyczących tego przedmiotu, łącznie z hysterezą magnetyczną, którą musiałem tu pominąć, patrz *J. A. Ewing*'a: ***Magnetic induction in iron and other metals;*** piękne to dziełko istnieje również w przekładzie niemieckim.

włókna, t. j. iloczyn jego przekroju σ i natężenia m, nazywa się „mocą“ solenoidu *(Stärke)*; moment ten posiada wartość stałą wzdłuż całego włókna, powiedzmy $m\sigma = n$. Końce solenoidu nazywają się jego *biegunami:* południowym (S) i północnym (N); kierunek dodatni wektora $\mathfrak{m}$ wskazuje od S ku N wzdłuż włókna; n stanowi zarazem tak zwaną moc każdego z tych biegunów. *

Na powierzchni bocznej solenoidu jest $\mathfrak{m}\nu = 0$, na biegunie północnym iloczyn $\mathfrak{m}\nu.\sigma$ posiada wartość $+ n$, na biegunie południowym $- n$; według (371) będzie przeto

$$\Phi = \frac{n}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \tag{372}$$

gdzie r_1 jest odległością dowolnego punktu od bieguna północnego r_2 zaś odległością tegoż punktu od bieguna południowego, tak jak gdyby w biegunach tych były skoncentrowane ilości magnetyzmu (pozornego) $+ n$, względnie $- n$, którym z osobna odpowiadałyby siły magnetyczne radyalne i odwrotnie proporcyonalne do kwadratów odległości. Zauważmy jednak, że solenoid rzeczywisty, acz bardzo cienki, posiadać będzie pewną, bądź co bądź, grubość; wzór więc powyższy i odpowiednie prawo odwrotnych kwadratów dla siły zachodzić będą dla wszystkich punktów przestrzeni z *wyjątkiem* tych atoli, których odległości od końców solenoidu są porównywalne z rozmiarami tych „końców“ czyli — dokładniej — powierzchni końcowych. „Biegun magnetyczny“ jest więc tylko pewnem pojęciem *granicznem*, a istnienie bieguna dodatniego o danej mocy jest zawsze związane z istnieniem drugiego bieguna, ujemnego, o takiej samej mocy.

Z powyższego wzoru widzimy bezpośrednio, że potencyał Φ solenoidu, a więc też odpowiednie pole magnetyczne nie ulegają żadnej zmianie, jeżeli, unieruchomiwszy obadwa bieguny, odkształcamy w dowolny sposób sam solenoid. Jeżeli bieguny zlewają się ze sobą, t. j. jeżeli solenoid jest zamknięty, pole magnetyczne znika.

§ 105. Magnes nazywa się *lamelarnym*, jeżeli w całem jego *wnętrzu* jest

$$curl\ \mathfrak{m} = 0 \tag{373}$$

i składowa styczna wektora $\mathfrak{m}$ ciągła, innemi słowy, jeżeli *wewnątrz* magnesu niema żadnych wirów magnetycznych. Siedliskiem wirów, czyli prądów fikcyjnych, jest wówczas sama tylko *powierzchnia* ma-

* Spotyka się też nazwa „*natężenie* bieguna“.

gnesu; tam bowiem składowa styczna siły magnetycznej jest nieciągła; inaczej byłoby, jak widzieliśmy, wszędzie $M = 0$.

Dzięki warunkowi (373) siła przyłożona posiada potencyał skalarny, powiedzmy χ

$$\mathfrak{m} = -\nabla\chi. \tag{374}$$

Wektor $\mathfrak{m}$ jest normalny do powierzchni $\chi = \text{const.}$; dwie takie powierzchnie nieskończenie bliskie ograniczają warstwę czyli *lamelę* magnetyczną o grubości h takiej, iż $mh = \text{const.}$, a mianowicie

$$mh = \chi_1 - \chi_2 ,$$

gdzie χ_1 dotyczy jednej, χ_2—drugiej strony lameli, w założeniu, że wektor $\mathfrak{m}$ wskazuje od 1 do 2. Iloczyn ten nazywa się momentem lub *mocą (Stärke)* lameli; każdy magnes lamelarny na takie daje rozłożyć się warstwy; stąd też jego nazwa. Nazewnątrz magnesu można położyć $\chi = \text{const.} = 0$.

Potencyał pola magnetycznego odpowiadającego dowolnemu magnesowi lamelarnemu, znowu z pominięciem części zależnej od różnicy przenikliwości μ', μ, możemy napisać, według (369) i (374):

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{m}\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)d\tau' = -\frac{1}{4\pi}\int \nabla\chi\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)d\tau' , \tag{375}$$

gdzie całka obejmuje wnętrze magnesu, czyli, według twierdzenia Greena (str. 58):

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int \chi\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d\tau' - \frac{1}{4\pi}\int \chi\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma ,$$

gdzie druga całka rozciąga się do powierzchni magnesu; ν jest normalną zwróconą nazewnątrz.

Dla punktów zewnętrznych mamy $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, tak iż całka przestrzenna znika; dla punktu wewnętrznego x, y, z całka ta będzie natomiast równa $-4\pi\chi(x, y, z)$. Ponieważ nazewnątrz magnesu jest $\chi = 0$, możemy dla dowolnego punktu przestrzeni napisać:

$$\Phi_{(x,\,y,\,z)} = -\frac{1}{4\pi}\int \chi\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma - \chi_{(x,\,y,\,z)} . \tag{376}$$

Jak okazano we Wstępie (str. 74), $\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma$ jest kątem widzenia elementu $d\sigma$ z punktu x, y, z; oznaczając przeto ten kąt bryłowaty przez $d\Omega$, otrzymamy:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int \chi d\Omega - \chi \quad (376a)$$

a z tej postaci wzoru nietrudno jest odczytać, że potencyał Φ przy przejściu przez powierzchnię magnesu pozostaje ciągły. Pamiętajmy, że kąt $d\Omega$ należy uważać jako dodatni dla punktu widzenia zewnętrznego, zaś jako ujemny dla punktu widzenia wewnętrznego; normalna ν ma bowiem być zwrócona nazewnątrz.

Powiedzieliśmy już, że każdy magnes lamelarny można rozłożyć na dowolnie cienkie warstwy o momencie mh stałym, czyli na lamele jednostajne (lub t. zw. proste; jeżeli natomiast moment jest zmienny od punktu do punktu, lamela nazywa się złożoną — *complex*). Na szczególną uwagę pod względem teoretycznym zasługuje lamela jednostajna nieskończenie cienka. Gdyby natężenie m siły przyłożonej było skończone, moment takiej lameli byłby nieskończenie mały. Niechaj tedy m stanie się nieskończenie wielkie, lecz tak aby w przejściu ideowem od lameli rzeczywistej do fikcyjnej nieskończenie cienkiej wartość graniczna $Lim\,(mh) = I$ była skończona. Ponieważ powierzchnia σ redukuje się w tym wypadku do pary powierzchni $\chi = \text{const.} = \chi_1$, $\chi = \text{const.} = \chi_2$, przeto będzie według (376), lub też wprost według (375), nazewnątrz lameli:

$$\Phi = \frac{I}{4\pi}\Omega\,, \quad (377)$$

gdzie Ω jest kątem, pod którym widzimy całą lamelę z punktu x, y, z. Lamela taka jest więc równoważna „warstwie podwójnej“ o momencie $I = Lim\,(mh)$. Wzór (375) przytoczyłem tu raz jeszcze umyślnie aby podkreślić tę okoliczność, że moment I posiada znaczenie całki liniowej siły przyłożonej. Przy przekroczeniu lameli od strony ujemnej (południowej) ku stronie dodatniej (północnej), t. j. w kierunku wektora $\mathfrak{m}$, potencyał Φ doznaje skoku I. (Porówn. zresztą str. 74.) Jeżeli lamela stanowi zamkniętą w sobie powierzchnię, potencyał Φ posiada wartość stałą $-I$ w dziedzinie wewnętrznej i wartość stałą O w dziedzinie zewnętrznej, tak iż odpowiednie pole magnetyczne znika wszędzie. Taż sama własność przysługuje zresztą lameli jednostajnej zamkniętej o jakiejkolwiek grubości; można ją bowiem rozłożyć na lamele zamknięte jednostajne, dowolnie cienkie.

Jeżeli lamela nieskończenie cienka jest niezamknięta, natenczas ograniczająca ją linia l odgrywa rolę linii wirowej magnetycznej, a raczej paska wirowego o szerokości h i o momencie mh, lub też wreszcie prądu elektrycznego fikcyjnego o natężeniu liczebnie takiem samem. Całka liniowa siły magnetycznej $\int \mathfrak{M} ds$, wzięta wzdłuż obwodu zamkniętego s przeszywającego la-

melę i splecionego z jej krawędzią l jedyny raz, równa się bowiem mh. Istotnie, przy pierwotnem już wprowadzeniu pojęcia siły przyłożonej mieliśmy

$$\int (\mathbf{M} - \mathbf{m}) ds = 0$$

dla każdego obwodu zamkniętego; ponieważ zaś $\mathbf{m}$ znika nazewnątrz lameli magnetycznej, przeto pozostaje

$$\int \mathbf{M} ds = mh.$$

Oto jest uzasadnienie słynnego twierdzenia *Ampère'a*, według którego lamela magnetyczna jest, co do zewnętrznego pola, równoważna opływającem ją prądowi elektrycznemu o natężeniu równem momentowi lameli.

Czynnik 4π odpadł z twierdzenia tego dzięki przyjętym tu, w myśl propozycyi Heaviside'a, jednostkom „racyonalnym“ miary.

§ 106. Magnes może być jednocześnie *solenoidalnym i lamelarnym*, a mianowicie jeżeli w całem jego wnętrzu τ' są zachowane obadwa warunki

$$div\, \mathbf{m} = 0 \quad \text{i} \quad curl\, \mathbf{m} = 0$$

i jeżeli wektor $\mathbf{m}$ jest ciągły wewnątrz magnesu aż do samej jego powierzchni, przy przekroczeniu której staje się nagle równym zeru. Przykładem takiego magnesu jest bryła, o dowolnym zresztą kształcie, namagnesowana *jednostajnie*, t. j. tak iż wektor $\mathbf{m}$ jest stały co do natężenia i kierunku w całem jej wnętrzu.

Pisząc znowu, jak w § 103:

$$\varphi = \Phi + \omega ,$$

a więc rozumiejąc przez ω potencyał „dodatkowy“, który znikałby gdyby było $\mu' = \mu$, otrzymamy według (369). dla dowolnego magnesu *jednostajnego*

$$\Phi = \frac{\mathbf{m}}{4\pi} \int \nabla' \left(\frac{1}{r}\right) d\tau'$$

czyli, pamiętając, że $\nabla' \left(\frac{1}{r}\right) = - \nabla \left(\frac{1}{r}\right)$:

$$(378) \qquad \Phi = - \mathbf{m} \nabla \Psi, \quad \text{gdzie } \Psi = \int \frac{d\tau'}{4\pi r} .$$

Magnes jednostajny zachowuje się więc tak, jak dwie kongruencyjne z nim bryły τ' zawierające „magnetyzmy“ o gęstościach je-

dnostajnych $+\rho'$, względnie $-\rho'$, z których pierwszą przesunięto względem drugiej w kierunku wektora $\mathbf{m}$ o długość h malejącą bezgranicznie, tak mianowicie, iż

$$Lim\,(\rho' h) = m.$$

(Porówn. zresztą §§ 94 i 95.)

Co do potencyału dodatkowego ω zależnego od niejednakowej przenikliwości magnesu i jego otoczenia, zauważę tylko dla przykładu, że daje się on natychmiast znaleść dla magnesu jednostajnego o postaci *elipsoidalnej*. Dotyczący rachunek jest w zasadzie zupełnie taki sam jak w § 95; funkcya Ψ, którą wówczas oznaczyliśmy tym samym symbolem, jest dana wewnątrz magnesu przez wzór (335'), nazewnątrz zaś przez (335). Uczynimy zadość wszystkim warunkom zagadnienia, kładąc $\varphi = \Phi + \omega = -\mathbf{a}\nabla\Psi$ i rozumiejąc przez $\mathbf{a}$ wektor stały co do kierunku i natężenia; przeprowadzenie rachunku szczegółowego, a mianowicie wyznaczenie wektora $\mathbf{a}$ z warunku granicznego dla powierzchni elipsoidu, pozostawiam czytelnikowi.

W dalszych rozdziałach tej książki postaram się nawet czynić to jaknajczęściej, po pierwsze dlatego, aby nie przerywać wykładu rzeczy zasadniczych zbyt długiemi dygresyami specyalnie rachunkowemi, po drugie zaś, aby dać czytelnikowi tematy do mniej lub więcej samodzielnych ćwiczeń.

ROZDZIAŁ V.

Prądy niemal stateczne.

Rozdział V.

Prądy niemal stateczne.

§ 107. Omówione w Rozdz. IV pole właściwie magnetostatyczne, dla którego nazewnątrz magnesów jest $curl\,\mathbf{M} = 0$, może w ciągu dowolnie długiego czasu trwać niezmiennie, obchodząc się bez wszelkich zewnętrznych zasiłków energii, czyli tworząc samo przez się układ energietycznie odosobniony.

Istnieją atoli inne pola magnetyczne, które również mogą być niezmiennemi (lecz nie noszą już nazwy „statycznych"), pola niezależne od wszelkich magnesów, a związane ściśle z istnieniem jednej lub kilku dziedzin cyklicznych, pierścieniowych, w których $curl\,\mathbf{M} \neq 0$, które więc są siedliskiem wirów magnetycznych, pomimo że $\mathbf{m} = 0$.

Wiemy, że dla izolatora doskonałego jest $c.curl\,\mathbf{M} = \dot{\mathbf{D}}$; istnieniu więc wiru magnetycznego w ciele takiem towarzyszyłaby polaryzacya elektryczna zmienna w czasie, a tam gdzie wir miałby być stały, polaryzacya elektryczna wzrastałaby proporcyonalnie z czasem; proces zaś taki rychło zakończyłby się wyładowaniem elektrycznem w tej lub innej postaci. Równanie powyższe nie przysługuje natomiast przewodnikom, jak np. metalom, ogólniej półprzewodnikom; dla ciał takich mamy w ogóle

$$c.curl\,\mathbf{M} = \dot{\mathbf{D}} + \lambda\mathbf{E}\ ,$$

w szczególności zaś, jeżeli prąd przesunięcia daje się zaniechać lub jeżeli $\mathbf{E} = \text{const.}$, a więc $\dot{\mathbf{D}} = 0$:

$$c.curl\,\mathbf{M} = \lambda\mathbf{E}.$$

Mniejsza zresztą o szczególną postać tego równania. W obecnej chwili interesuje nas to tylko, że wewnątrz tych ciał może być

$curl\,\mathbf{M} \neq 0$, naprzykład $curl\,\mathbf{M} = \text{const.} \neq 0$, w ciągu dowolnie długiego czasu, *bez żadnej zmiany czasowej* wektorów elektrycznych i magnetycznych. Stanom tym towarzyszy ustawiczne wywiązywanie się ciepła (ciepło Joule'a) w substancyi samego przewodnika, kosztem jakiegoś źródła energii; dlatego właśnie odróżniamy je od czysto statycznych. (Porówn. uwagi wstępne do magnetostatyki, w Rozdz. IV.) Obecnie zresztą zajmuje nas to tylko, że pola takie są możliwe (a nawet łatwo dają się urzeczywistnić i w praktyce znacznie ważniejszą odgrywają rolę niż pola związane z magnesami).

Mówiąc nieco konkretniej,—jeżeli połączymy drutem metalowym bieguny stałego elementu galwanicznego lub bateryí termoelektrycznej, wówczas w otaczającej przestrzeni mamy pole magnetyczne trwające niezmiennie, dopóki ów element lub inne źródło energii dostarcza układowi w ciągu każdej jednostki czasu ustawicznie tych samych ilości energii, przetwarzających się na ciepło Joule'a. Drut metalowy wraz ze źródłem energii tworzą rurkę zamkniętą czyli „obwód“ zupełny, który posiada szczególnie ważne znaczenie dla całego pola magnetycznego. Całka siły magnetycznej, wzięta wzdłuż jakiejkolwiek krzywej s zamkniętej, niesplecionej z tym obwodem, równa się zeru, podczas gdy dla każdej krzywej zamkniętej *splecionej* z obwodem tym raz jeden całka ta $\int \mathbf{M} ds$ jest *różna* od zera, a mianowicie równa jednej i tej samej wielkości $+I$ lub $-I$, zależnie od kierunku całkowania, lecz niezależnie od położenia ani kształtu, ani też od rozmiarów takiej krzywej. Innemi słowy (porówn. Wstęp): *obwód złożony z drutu i ze źródła energii stanowi jedyną dziedzinę wirową, jedyny pierścień wirowy całego pola magnetycznego;* nazewnątrz tego pierścienia pole jest wszędzie irotacyjne. Całka

$$I = \int \mathbf{M} ds ,$$

wzięta w kierunku dodatnim, jest *momentem* tego wiru *, a jako taka, jak wiemy ze Wstępu, stanowi nader charakterystyczną cechę całego pola magnetycznego.

---

* Przez I rozumiemy skalar *dodatni*. Kierunkiem *dodatnim* wiru magnetycznego (czyli prądu elektrycznego) jest ten, w którym należy spoglądać na oplatającą go drogę zamkniętą s dającą $\int \mathbf{M} ds = +I$, aby widzieć kierunek całkowania jako *zgodny* z kierunkiem ruchu strzałek zegarowych. Jeżeli źródłem energii jest np. element Daniella, dodatni kierunek wiru jest $Cu \longrightarrow d \longrightarrow Zn$, gdzie d wyobraża łącznik, np. drut miedziany.

Otóż, zapominając na razie o tem, że moment I jest proporcyonalny do całkowitego natężenia prądu elektrycznego, i nie troszcząc się zgoła o to, co zachodzi w samym drucie lub w aparacie odgrywającym rolę źródła energii, zajmiemy się obecnie własnościami *pola magnetycznego* odpowiadającego jednemu lub kilku takim „obwodom".

Jeżeli mamy n obwodów s_1, s_2, ... s_n, każdy z nich stanowi pierścień wirowy pola magnetycznego; momenty ich oznaczmy odpowiednio przez I_1, I_2, ... I_n.

Dla uproszczenia możemy przyjąć, że każdy z nich jest nieskończenie cienki, czyli „liniowy"; każdy zresztą pierścień wirowy o przekroju skończonym można rozłożyć na włókna dowolnie cienkie.

Przypuśćmy więc, że mamy układ n liniowych obwodów prądu elektrycznego, a raczej liniowych wirów magnetycznych, o dowolnych kształtach i rozmiarach i o danej konfiguracyi w przestrzeni.

Dla całej zresztą przestrzeni założymy *izotropię i jednorodność* pod względem magnetycznym; μ niechaj więc posiada wszędzie, nawet w drutach i źródłach energii, jednę i tą samą wartość skalarną. Aby nie zaciemniać punktów istotnych przez komplikacye dodatkowe, przyjmijmy założenie to dla wszystkich wywodów niniejszego Rozdziału.

W tych warunkach nietylko polaryzacya $\mathbf{B}$, lecz również sama siła magnetyczna $\mathbf{M}$ będzie czysto *solenoidalna;* całe przeto pole magnetyczne, jak widzieliśmy we Wstępie (str. 75—79), będzie zupełnie określone przez momenty I_1, ... I_n i przez własności geometryczne układu obwodów s_1, ... s_n. Aby je otrzymać, wystarcza położyć w przeprowadzonych tam wywodach ogólnych $\mathbf{R} = \mathbf{M}$.

§ 108. *Nazewnątrz* włókien s_1, ... s_n pole jest irotacyjne, a więc posiada potencyał skalarny φ:

$$\mathbf{M} = -\nabla\varphi \ ;$$

potencyał ten jest wielowartościową funkcyą położenia w przestrzeni cyklicznej, $(n+1)$ — spójnej, która pozostaje po wykluczeniu owych n pierścieni. Według (148), str. 79, mamy mianowicie

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\sum I_k \Omega_k \ , \qquad (379)$$

gdzie Ω_k jest kątem widzenia obwodu s_k z rozważanego punktu pola, suma zaś obejmuje wszystkie obwody s_1, ... s_n. O tem, że każde włókno wirowe jest, pod względem pola zewnętrznego, równoważne podwójnej warstwie czyli lameli magnetycznej, wspomnieliśmy już poprzednio.

W substancyi samych obwodów wzór powyższy traci oczywiście swe znaczenie; ta bowiem jest siedliskiem wirów.

§ 109. Ponieważ $div\,\mathbf{M} = 0$, przeto siła magnetyczna posiada *wszędzie potencyał wektorowy* *, a mianowicie, według (145), str. 76:

$$(380) \qquad \frac{1}{4\pi}\sum I_k \int \frac{d\mathbf{s}_k}{r} ,$$

gdzie $d\mathbf{s}_k$ jest elementem liniowym obwodu s_k, pojętym wektorowo. Nie zatrzymując się nad tym wektorem pomocniczym, skorzystamy zeń, jak we Wstępie, jedynie w celu wyrażenia samej siły magnetycznej przez dane wiry; mamy mianowicie

$$\mathbf{M} = curl\ (380) ,$$

a więc, jak na str. 79:

$$(381) \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{4\pi}\sum I_k \int \frac{1}{r^2} V d\mathbf{s}_k \mathbf{r} ;$$

we wzorze tym, który przysługuje całej bez wyjątku przestrzeni, r jest odległością elementu $d\mathbf{s}_k$ od punktu x, y, z, w którym panuje siła $\mathbf{M}$, zaś $\mathbf{r}$ wektorem jednostkowym wskazującym od $d\mathbf{s}_k$ ku punktowi x, y, z; wektor $d\mathbf{s}_k$ wskazuje w kierunku wiru magnetycznego czyli prądu elektrycznego, całka obejmuje obwód s_k, suma zaś—wszystkie obwody.

Można więc powiedzieć, że każdemu elementowi wiru czyli prądu $d\mathbf{s}$ odpowiada elementarne pole magnetyczne

$$(381a) \qquad \delta\mathbf{M} = \frac{I}{4\pi r^2} V d\mathbf{s}.\mathbf{r} ;$$

kierunek wektora $\delta\mathbf{M}$ w dowolnym punkcie p jest normalny do elementu $d\mathbf{s}$ i do prostej łączącej go z punktem p, natężenie zaś jego jest odwrotnie proporcyonalne do kwadratu odległości od $d\mathbf{s}$ i wprost

---

* Założyliśmy bowiem $\mu = \text{const.}$; w wypadku anizotropii lub niejednorodności siła $\mathbf{M}$ nie posiada naogół potencyału wektorowrgo; natomiast polaryzacya $\mathbf{B}$ posiada potencyał wektorowy, bez żadnych ograniczeń; ten to potencyał wektorowy, określony przez $\mathbf{B} = curl\,\mathbf{A}$ i warunek dodatkowy $div\,\mathbf{A} = 0$, występuje w dziełach Maxwella pod nazwą „potencyału wektorowego indukcyi magnetycznej“ lub też *„momentu elektrokinetycznego“* w danym punkcie. W wypadku izotropii i jednorodności środowiska otrzymalibyśmy go z (380), mnożąc wyraz ten poprostu przez μ.

proporcyonalne do momentu I (czyli do natężenia prądu), do długości ds elementu wirowego i wreszcie do wstawy kąta ds, $\mathbf{r}$.

Wzór (381a) jest wyrazem słynnego prawa *Biot-Savarta*. Nie zapominajmy jednak, że rozkład wyrazu całkowitego (381) na elementy (381a) posiada charakter sztuczny; albowiem nie istnieją wiry niezamknięte. Do (381a) moglibyśmy dodać wyraz elementarny dowolny, byle tylko taki, który po scałkowaniu wzdłuż każdego obwodu zamkniętego s_k, daje zero. Wyraz odpowiadający prawu Biot-Savarta, nie będąc elementem fizycznym, stanowi bądź co bądź dogodny element rachunku.

§ 110. *Energia magnetyczna* pola, lub też (jak się zwykło mówić) układu wirów lub prądów, jest

$$U_m = \tfrac{1}{2}\int \mathbf{MB}\,d\tau = \tfrac{1}{2}\mu\int M^2 d\tau\ ,$$

gdzie całkowanie obejmuje całą przestrzeń. Ponieważ pole $\mathbf{M}$ jest czysto solenoidalne, możemy bezpośrednio zastosować Twierdz. XII i XIIa, podane we Wstępie.

Oznaczając przez S_k indukcyę magnetyczną przez obwód s_k, t. j. liczbę rurek jednostkowych *polaryzacyi* magnetycznej przeszywających ten obwód, a więc pisząc $S_k = \int \mathbf{B}\nu d\sigma_k = \mu\int \mathbf{M}\nu d\sigma_k$, otrzymamy według Twierdz. XII:

$$U_m = \tfrac{1}{2}\sum I_k S_k\ , \qquad (382)$$

a wzór ten jest ważny w ogóle, t. j. również dla środowiska niejednorodnego i anizotropowego, o czem czytelnik przekona się łatwo, wracając do wywodów str. 86 i rozkładając całe pole na nieskończenie cienkie rurki *polaryzacyi* magnetycznej. Suma w (382) obejmuje wszystkie obwody.

Stosując Twierdz. XIIa, otrzymamy dla tejże energii wyraz:

$$U(I) = \tfrac{1}{2}\sum_i\sum_k L_{ik} I_i I_k\ , \qquad (383)$$

gdzie, przy założeniu izotropii i jednorodności:

$$L_{ik} = L_{ki} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{(s_i)}\int_{(s_k)} \frac{d\mathbf{s}_i d\mathbf{s}_k}{r}\ , \qquad L_{kk} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{(s_k)}\int_{(s_k)} \frac{d\mathbf{s}\,d\mathbf{s}'}{r}\ . \qquad (384)$$

Znaczenie symbolów jest takie same jak na str. 88; dodaliśmy jedynie czynnik μ; jest bowiem $U = \mu$ razy $\frac{1}{2}\int M^2 d\tau$, wektorowi zaś

ogólnemu **R** we Wstępie odpowiada tu **M**. Wskaźnik (I) ma przypominać, że chodzi o energię jako funkcyę wielkości $I_1, \ldots I_n$. Wskaźnik m (= mgnt.) opuściliśmy, dla uproszczenia, w braku wszelkiej obawy o nieporozumienie.

Spółczynniki samoindukcyi L_{kk} i *spółczynniki indukcyi wzajemnej* $L_{ki} = L_{ik}$ zależą jedynie od kształtu, rozmiarów i konfiguracyi obwodów, czyli krócej: od własności geometrycznych układu, i oprócz tego od przenikliwości μ środowiska, do której są proporcyonalne. Wszystko zresztą, co powiedziano we Wstępie, na str. 89—90, należałoby tu dosłownie powtórzyć.

Energia U_m, istotnie magnetyczna, nazywa się też, według Maxwella, *energią elektrokinetyczną* układu prądów elektrycznych kongruencyjnych z obwodami $s_1, .., s_n$ i równoważnych biegnącym wzdłuż nich wirom magnetycznym; natężenia całkowite prądów są proporcyonalne do momentów wirów, a spółczynnik proporcyalności zależy jedynie od wyboru układu jednostek miary; można też wprost $I_1, \ldots I_n$ uważać jako natężenia odpowiednich prądów elektrycznych. Podkreślmy atoli tę okoliczność, że powyższe wyrazy energii nie opierają się zgoła na tem, że $s_1, \ldots s_n$ są prądami elektrycznemi, lecz jedynie tylko na tem, że są wirami magnetycznemi, że są wirami pola, którego energią jest U_m; ta sama jeszcze uwaga dotyczyć będzie sił ponderomotorycznych, do których niebawem przejdziemy.

Pprzypomnijmy sobie ze Wstępu (str. 87), że indukcye magnetyczne S_k przez poszczególne obwody s_k są funkcyami liniowemi, jednorodnemi wszystkich momentów:

$$(385) \qquad S_k = L_k I_i + L_{k_2} I_2 + \ldots + L_{kn} I_n \; ; \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Na tej to własności opiera się przejście od kształtu (382) do (383). Moglibyśmy równania te rozwiązać ze względu na $I_1, \ldots I_n$, a więc wyrazić I_k jako funkcyę liniową, jednorodną wszystkich S_k. Oznaczając odpowiednie spółczynniki przez l_{ik} i podstawiając tak wyrażone I_k do (382) otrzymalibyśmy energię jako funkcyę kwadratową jednorodną indukcyj S_k:

$$(386) \qquad U(S) = \tfrac{1}{2} \sum\sum l_{ik} S_i S_k \; .$$

Postać ta jest mniej dogodną niż (383), dla tego nikt jej nie używa; jest ona jednak niemniej prawdziwą; a wprowadzamy ją tu na chwilę, aby za pomocą niej objaśnić następujące wywody. Co do spółczynników l, nie posiadających żadnej nazwy, to będą one, podobnie jak L, zależne jedynie od własności geometrycznych układu, z pominięciem czynnika $^1/_\mu$.

Pod względem stosunków matematycznych panuje najzupełniejsza analogia między energią *magnetyczną* czyli *elektrokinetyczną* układu obwodów $s_1, \ldots s_n$ z jednej strony, a energią *elektrostatyczną* układu przewodników $1, \ldots n$ z drugiej strony; wzorom (382), (383),

(386) odpowiadają wzory elektrostatyczne (201), (207), (206) — *w tym* właśnie porządku, w jakim je wypisałem. I nietylko wyrazy energii, lecz same układy „obwodów“ i „przewodników“ i odpowiednie pola wykazują pod względem charakterystycznych swych cech wybitną analogię, nie bacząc na to, że w jednym wypadku chodzi o pierścienie $s_1, \ldots s_n$ oplatane przez linie pola, w drugim— o dziedziny $1, \ldots n$, na powierzchni których urywają się linie pola. W tej jednak analogii należy uprzytomnić sobie, co czemu odpowiada, szczególniej jeżeli chodzi nietylko o same wyrazy matematyczne energii, lecz również np. o działania ponderomotoryczne jednego i drugiego układu.

Z jednej strony mamy ładunki elektryczne e_i i potencyały przewodników φ_i, z drugiej strony indukcye magnetyczne S_i i momenty wirów magnetycznych I_i. Otóż, potencyał φ_i jest *całką liniową* siły elektrycznej od powierzchni przewodnika i do nieskończoności (lub do ziemi), moment I_i nie jest niczem innem jak całką liniową siły magnetycznej wzdłuż drogi zamkniętej oplatającej obwód s_i; ładunek e_i jest *całką powierzchniową* polaryzacyi elektrycznej dla powierzchni przewodnika i, zaś S_i nie jest niczem innem jak całką powierzchniową polaryzacyi magnetycznej przez powierzchnię ograniczoną obwodem s_i. Odpowiadają więc sobie wzajemnie pierwsze dwie wielkości, i drugie dwie wielkości; stąd zaś inne punkty analogii wynikają już w określony zupełnie sposób. Analogia ta wyrazi się więc przez następującą tablicę:

układ obwodów prądu el. czyli wirów mgnt. $s_1, s_2, \ldots s_n$	układ przewodników naelektryzowanych $1, 2, \ldots n$
natężenia prądów czyli momenty wirów $I_1, I_2, \ldots I_n$ (stałe wzdłuż każdego obwodu)	potencyały przewodników $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ (stałe na powierzchni każdego przewodnika)
indukcye magnetyczne przez poszczególne obwody $S_1, S_2, \ldots S_n$	ładunki przewodników $e_1, e_2, \ldots e_n$
energia magnetyczna (elektrokinetyczna)	energia elektrostatyczna
spółczynniki L_{ik}, L_{kk}	spółczynniki b_{ik}, b_{kk} (pojemności)
spółczynniki l_{ik}, l_{kk}	spółczynniki a_{ik}, a_{kk} (spółcz. potencyalne).

Stosunki te, oczywiście, nie opierają się na jakichś specyficznych własnościach elektrycznych lub magnetycznych. Taką samą tablicę analogii można sporządzić dla układu wirów dowolnego pola wektorowego solenoidalnego z jednej—i dla układu powierzchni izopotencyalnych dowolnego pola irotacyjnego z drugiej strony.

§ 111. ***Siły ponderomotoryczne.*** — Załóżmy, że moment wiru czyli natężenie prądu elektrycznego I_k w każdym obwodzie jest

utrzymywane na danej, *stałej* wartości, kosztem źródeł energii, włączonych w poszczególne obwody. W takich warunkach, przy danej przenikliwości μ, energia $U_m = U(I)$ będzie funkcyą samych tylko spółczynników L_{kk}, L_{ik}, t. j. funkcyą *konfiguracyi* układu (skoro nazwą tą obejmiemy również kształty i rozmiary wszystkich n obwodów). Dla wyznaczenia tej konfiguracyi należy podać wartości pewnej liczby spółrzędnych (w uogólnionem znaczeniu słowa) czyli parametrów wzajemnie niezależnych, z których jeden jakikolwiek oznaczymy przez x,—podobnie jak w § 75. Jeżeli wszystkie obwody są sztywne, widzimy z (384), że spółczynniki samoindukcyi L_{kk} są niezmienne, zaś L_{ik} zależą jedynie od wzajemnego położenia obwodów s_i, s_k. Dla wyznaczenia położenia jepnego tworu sztywnego względem drugiego należy i wystarcza podać 6 parametrów niezależnych. Dla n obwodów sztywnych liczba parametrów x byłaby więc równa $6(n - 1)$. Jeżeli natomiast obwody są giętkie, lub w ogóle odkształcalne, wówczas będą też zmienne spółczynniki samoindukcyi, a liczba parametrów konfiguracyjnych wzajemnie niezależnych będzie nieskończoną, t. j. będziemy musieli podać wartość pewnych wielkości x dla każdego elementu indywidualnego każdego obwodu, czyli uważać x jako funkcyę łuku s mierzonego to wzdłuż jednego, to wzdłuż drugiego obwodu. Nie wnikając jednak we wszystkie te szczegóły, będziemy rozumowali w sposób ogólny, oznaczając przez x jakikolwiek z pośród wszystkich parametrów niezbędnych i wystarczających dla określenia chwilowej konfiguracyi układu, a więc też chwilowej wartości każdego spółczynnika L.

Siłę ponderomotoryczną, odpowiadającą parametrowi x, oznaczmy, znowu jak w Elektrostatyce, przez X, tak iż suma $\sum X\delta x = \delta W$ będzie wyrażała pracę mechaniczną całego układu przy przesunięciach wirtualnych δx. Suma ta ma obejmować wszystkie parametry; jeżeli obwody są odkształcalne, otrzymamy zamiast sumy jednę lub kilka całek rozciągających się wzdłuż obwodów.

Według Rozdziału III obtrzymalibyśmy wszelkie siły ponderomotoryczne z przyrównania pracy mechanicznej ubytkowi energii pola, w założeniu atoli, że przy przesunięciu wirtualnem indukcya magnetyczna przez każdą powierzchnię indywidualną, a więc też przez powierzchnie ograniczone obwodami s_1, ... s_n, pozostaje niezmienna; możemy więc napisać:

$$\delta W = \sum X\delta x = -\delta U; \quad S_1, S_2, \ldots S_n = const.,$$

a więc $X = -\frac{\delta U(S)}{\partial x}$, gdzie wskaźnik S ma przypominać nietylko, że chodzi o energię wyrażoną przez S_1, ... S_n, lecz również, że każda z tych wielkości ma podczas przesunięcia zachowywać wartość stałą.

Lecz, według założenia mają *być stałe momenty wirów czyli natężenia prądów* $I_1, \ldots I_n$, nie zaś indukcye $S_1, \ldots S_n$ przez poszczególne obwody. Sprawa jest zupełnie taka sama jak w § 75. Pisząc znowu

$$U(S) + U(I) - \sum I_k S_k = 0$$

i rozumując jak wówczas, otrzymamy

$$-\frac{\partial U(S)}{\partial x} = \frac{\partial U(I)}{\partial x},$$

a więc, według powyższego wzoru, *przy stałych natężeniach* $I_1, \ldots I_n$

$$X = +\frac{\partial U(I)}{\partial x} = \tfrac{1}{2} \sum\sum I_i I_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial x}. \qquad (387)$$

Oto jest znany wyraz siły ponderomotorycznej dla każdego z osobna parametru konfiguracyjnego. Jednocześnie mamy też

$$\delta W = + \delta U_m \quad (I_1, \ldots I_n \text{ niezmienne}). \qquad (388)$$

Porówn. wzór elektrostatyczny (227).

Przy niezmiennych natężeniach prądu energia elektrokinetyczna układu *rośnie* o ilość pracy wykonanej przez układ, tak iż źródła muszą dostarczyć układowi ilość energii $2\delta W$, t. j. *równą podwójnej pracy wykonanej*, oprócz tych ilości, które idą na pokrycie ciepła Joule'a wytworzonego w każdym obwodzie.

Według (387) energia elektrokinetyczna, przy stałem natężeniu prądów odgrywa więc rolę potencyału sił X, czyli tak zwanych sił elektrodynamicznych. Nie możemy tu, niestety, wniknąć w historyczny rozwój dotyczących pojęć i teoryj. Zauważmy natomiast, że przy powyższem przedstawieniu rzeczy, potencyał ów nie jest niczem innem jak tylko energią pola magnetycznego odpowiadającego danym wirom i że powyższe wywody nie opierają się na żadnych jeszcze związkach elektro-magnetycznych. *Potencyałem elektrodynamicznym* zgodzono się zresztą nazywać energię tę wziętą ze znakiem *ujemnym*, a więc wielkość $-U(I)$.

Ponieważ $U_m = U(I)$ jako energia pola jest *jednowartościową* funkcyą konfiguracyi układu, przeto praca mechaniczna W_{12} wykonana przez układ podczas przejścia jego z jednej konfiguracyi (1) do jakiejkolwiek innej (2), przy stałych $I_1, \ldots I_n$, będzie *niezależna od drogi przejścia*, a mianowicie równa

$$W_{12} = U_2(I) - U_1(I). \qquad (388a)$$

Sumowanie podwójne po prawej stronie (387) obejmuje wszystkie spółczynniki samoindukcyi i indukcyi wzajemnej różnych obwo-

dów, które w ogóle tylko zależą od danego parametru konfiguracyjnego x.

Jeżeli wszystkie obwody są *sztywne*, mamy $\partial L_{kk}/\partial x = 0$ dla wszelkich k i dla każdego parametru x, tak iż siły X zależą tylko od wyrazów

$$\frac{\partial L_{ik}}{\partial x} \text{ dla } i \neq k.$$

Jeżeli cały układ składa się z *dwóch* tylko obwodów s_1, s_2, mamy

$$U(I) = \tfrac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \tfrac{1}{2} L_{22} I_2^2 \,, \tag{389}$$

a jeżeli obadwa są *sztywne:*

$$X = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x} = \frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\partial}{\partial x} \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \,, \tag{390}$$

gdzie, skorzystawszy z (384), napisaliśmy $d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 = ds_1 ds_2 . \cos \varepsilon$, tak iż ε jest kątem zawartym między elementami $d\mathbf{s}_1$, $d\mathbf{s}_2$. Zmienna, i miarodajna dla działań ponderomotorycznych, część energii elekrokinetycznej redukuje się tu do wyrazu

$$\frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \,,$$

który jest zarazem tak zwaną energią potencyalną wzajemną prądów „płynących“ wzdłuż s_1, s_2. Taką samą zupełnie energię wzajemną posiadałyby dwie lamele magnetyczne o krawędziach s_1, s_2 i o mocy równej I_1, względnie I_2. Wzajemne działania mechaniczne będą w jednym i drugim wypadku zupełnie takie same, co do wielkości i kierunku; lecz układ magnesów lamelarnych (lub innych) jest energietycznie odosobniony, czyli pracuje kosztem własnej energii, podczas gdy układ obwodów prądu pracuje kosztem źródeł (elementów galwanicznych, lub t. p.). Energia zwajemna dwóch magnesów lamelarnych *maleje* o ilość równą pracy przez nie wykonanej; energia natomiast obwodów będących siedliskiem prądów stałych *rośnie* o ilość równą pracy wykonanej.

Liczba parametrów konfiguracyjnych x dla dwóch obwodów sztywnych jest $= 6$. Możemy np. wyobrazić sobie jeden układ spółrzędnych $O_1 x_1 y_1 z_1$, związany sztywnie z obwodem s_1, i podobnie drugi układ $O_2 x_2 y_2 z_2$ związany sztywnie z obwodem s_2, i wprowadzić jako trzy parametry spółrzędne a, b, c punktu O_2 względem układu $O_1 x_1 y_1 z_1$, zaś jako trzy pozostałe parametry obrać trzy wielkości kątowe α, β, γ wyznaczające „oryentacyę“ obwodu s_2 względem pierwszego układu, a więc też względem samego obwodu s_1, jak to się czyni zwykle w dynamice ciał sztywnych. (Chodzi bowiem jedynie o *względne* położenie i oryentacyę jednego obwodu

w stosunku do drugiego.) Zmianom samych tylko a, b, c będzie wówczas odpowiadało *przesunięcie postępowe* jednego obwodu względem drugiego, a odpowiednie siły mechaniczne będą $\frac{\partial U(I)}{\partial a}$, $\frac{\partial U(I)}{\partial b}$, $\frac{\partial U(I)}{\partial c}$, zaś zmianom parametrów α, β, γ będzie odpowiadał $\overset{b}{o}$*rót* s_1 względem s_2, tak iż $\frac{\partial U(I)}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial U(I)}{\partial \beta}$, $\frac{\partial U(I)}{\partial \gamma}$ będą momentami obrotu przynależnych par sił. Każda z tych sił będzie, według (390), *caeteris paribus*, proporcyonalna do iloczynu natężeń $I_1 I_2$ i do przenikliwości magnetycznej środowiska.

Opierając się na postaci energii (383) i na znaczeniu geometrycznem (384) spółczynników L, można powiedzieć, że każda para elementów $d\mathbf{s}$, $d\mathbf{s}'$, należących bądź to do jednego, bądź też do dwóch różnych obwodów daje dla energii wyraz elementarny

$$\frac{\mu}{4\pi} II' \frac{d\mathbf{s}.d\mathbf{s}'}{r},$$

a więc dla siły ponderomotorycznej X wyraz elementarny, powiedzmy δX:

$$\delta X = \frac{\mu}{4\pi} II' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\mathbf{s}.d\mathbf{s}'}{r}\right), \tag{391}$$

gdzie x jest jednym z parametrów określających konfiguracyę elementów $d\mathbf{s}$, $d\mathbf{s}'$ i gdzie, jak wyżej, możemy napisać $d\mathbf{s}.d\mathbf{s}' = ds.ds'.\cos\varepsilon$. Jako jeden z parametrów x można uważać kąt ε, jako inny, niezależny od ε, można wprowadzić odległość wzajemną r tych elementów. Dwoma innemi jeszcze parametrami byłyby kąty $\theta = (\mathbf{r}, d\mathbf{s})$, $\theta' = (\mathbf{r}, d\mathbf{s}')$. Kąt zawarty między płaszczyznami $(\mathbf{r}, d\mathbf{s})$ i $(\mathbf{r}, d\mathbf{s}')$ nie jest już niezależnym od θ, θ', ε. *Cztery* parametry

$$r,\ \varepsilon,\ \theta,\ \theta'$$

wyznaczają już zupełnie konfiguracyę pary elementów liniowych $d\mathbf{s}$, $d\mathbf{s}'$. Oznaczając więc przez δR siłę działającą wzdłuż prostej łączącej te elementy i dążącą do zwiększenia ich odległości r, mielibyśmy według (391)

$$\delta R = -\frac{\mu}{4\pi} II' \frac{d\mathbf{s}.d\mathbf{s}'}{r^2}; \tag{391a}$$

dla momentu pary sił starającej się zwiększyć kąt ε otrzymalibyśmy

$$-\frac{\mu}{4\pi} II' ds.ds' \frac{\sin\varepsilon}{r} \tag{391b}$$

i podobnie też dwa dalsze wyrazy dla „sił“, a raczej momentów par, odpowiadających pozostałym parametrom θ, θ'. Pozostawiając jednak wszystko to na uboczu, zaznaczmy jedynie, że powyższa składowa „centralna“ δR jest, *caeteris paribus*, odwrotnie proporcyonalna do kwadratu odległości elementów ds, ds'; jeżeli ε jest kątem ostrym, δR jest siłą „przyciągającą“; wówczas bowiem wyraz (391a) jest ujemny; jeżeli ε jest kątem rozwartym, mamy siłę „odpychającą“, jeżeli zaś $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, siła δR znika.

Tym sposobem otrzymalibyśmy tak zwane „prawa elementarne elektrodynamiki“.

Zauważmy atoli, że rozkład taki każdej ze sił ponderomotorycznych X na składowe elementarne, odpowiadające poszczególnym parom ds, ds', jest zupełnie sztuczny i nieskończenie dowolny. Suma bowiem daje się rozłożyć na dodajniki w nieskończenie wiele różnych sposobów. Energia $U(I)$, z której przez różniczkowanie wywodzą się wszystkie owe siły, zawiera pewną liczbę całek podwójnych kształtu

$$\int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds.ds' ,$$

a więc zachowa swą wartość, jeżeli do wyrazu stojącego pod całkami dodamy jeszcze inny jakikolwiek $fds.ds'$, którego całka wzdłuż obwodów s, s' znika; takim wyrazem jest np. $\frac{\partial^2 g}{\partial s\, \partial s'}\, ds.ds'$, gdzie g jest jednowartościową, lecz zresztą dowolną funkcyą położeń ds, ds', jak np. jednowartościową funkcyą wzajemnej odległości tych elementów lub wprost samą ich odległością r; wynikłoby stąd dla potencyału elektrodynamicznego elementarnego, a więc też dla odpowiednich sił elementarnych całe mnóstwo różnych wyrazów, powiedzmy, kształtu

$$\delta X = \frac{\mu}{4\pi} II' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{\partial^2 g}{\partial s\, \partial s'}\right) , \tag{392}$$

a każda taka siła byłaby niemniej uprawnioną jak (391), albowiem każda z nich prowadziłaby do tych samych działań mechanicznych wypadkowych, prawdziwych co do wielkości i kierunku. Istotnie *Ampère*, *Grassmann* i inni dali różne przykłady takich „praw elementarnych“, z któremi polecam czytelnikowi zapoznać się bliżej.*

---

* Patrz Encyklopädie d. mathem. Wissenschaften, V 2, zeszyt I, Art. 12. *R. Reiffa* i *A. Sommerfelda*: *Standpunkt d. Fernwirkung. Die Elementargesetze;* w artykule tym są omówione, w formie zwięzłej i bardzo jasnej, klasyczne prace *Coulomba*, *Örsteda*, *Biota* i *Savarta*, *Ampère'a*, *Grassmanna*, *F. Neumanna*, *Wilhelma Webera*, *Gaussa* i *Riemanna*, *Karola Neumanna* i wreszcie *Clausiusa*; tamże znajdzie czytelnik zestawienie literatury. — Badania *Ampère'a* są omówione obszernie w II tomie *El. and Mgnt.* Maxwella: Część IV, Rozdz. II.

Dotyczące badania odegrały w rozwoju nauki ze wszech miar doniosłą rolę. Obecnie posiadają może znaczenie tylko „czysto historyczne“, jak się mówi. Lektura jednak samych tych prac oryginalnych, szczególniej zaś klasycznej rozprawy *Ampère'a* * z roku 1826, jest też z innych względów nader pouczająca i na gorące zasługuje polecenie.

Lecz wspomniany rozkład sił jest też „zupełnie sztuczny“, — albowiem odrębna para elementów „$d\mathbf{s}$, $d\mathbf{s}'$“ nie daje się urzeczywistnić nawet w przybliżonem znaczeniu słowa i nie można o niej mówić fizycznie chociażby tylko nawet w znaczeniu pojęcia granicznego (jak np. o punkcie elektrycznym lub o nieskończenie cienkiej lameli i t. p.). Każda rurka wirowa jest albo nieskończenie długa albo *zamknięta* w sobie, a takiemi były właśnie nasze „obwody“ $s_1, \ldots s_n$. Możnaby więc mówić o parze obwodów elementarnych dowolnie małych, lecz zawsze *zamkniętych*, nie zaś o włóknach nieskończenie krótkich, prostych, a chociażby nawet krzywych, lecz niezamkniętych. Pary $d\mathbf{s}$, $d\mathbf{s}'$ posiadają, na tle spółczesnych poglądów, charakter elementów rachunku, elementów matematycznych, nie zaś fizycznych. To samo zaś możnaby powiedzieć o odpowiednich „prawach elementarnych“ elektrodynamiki.

§ 112. ***Siły elektromotoryczne wzbudzone.*** — Niechaj S_k będzie znowu indukcyą magnetyczną przez obwód s_k, a raczej przez powierzchnię σ_k ograniczoną tym obwodem, w danej chwili t, a więc

$$S_k = \int \mathbf{B}_\nu d\sigma_k.$$

Jeżeli pole magnetyczne jest zmienne w czasie, (a zmiany te mogą towarzyszyć bądź to zmianom natężeń $I_1, \ldots I_n$ w poszczególnych obwodach, bądź też przesunięciom lub odkształceniom samych tych obwodów) natenczas S_k będzie w ogóle również zmieniać się z czasem. Prędkość tej zmiany stanowić będzie to, co w Rozdz. I nazwano prądem magnetycznym przez powierzchnię σ_k; otrzymamy przeto według drugiego prawa zasadniczego (str. 122), czyli według drugiego z równań (31), odejmując od wektora elektrycznego $\mathbf{E}$ ewentualną siłę przyłożoną $\mathbf{e}$, jak w równaniu (B'), str. 226:

$$\frac{1}{c}\frac{dS_k}{dt} = -\int (\mathbf{E} - \mathbf{e}) d\mathbf{s}_k$$

---

* *A. Ampère. Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience.* Paryż, 1826. Drugie wydanie ukazało się w 1883.

gdzie $\mathbf{E} - \mathbf{e}$ jest siłą elektryczną odpowiadającą zmianom pola magnetycznego, zaś całkowanie obejmuje wszystkie elementy $d\mathbf{s}_k$ rozważanego obwodu s_k. Całka $\int (\mathbf{E} - \mathbf{e}) d\mathbf{s}_k$ nazywa się *siłą elektromotoryczną indukowaną* czyli *wzbudzoną* w obwodzie s_k. Oznaczając ją przez $\frac{1}{c} V_k$, gdzie c jest zwykłą stałą „uniwersalną“ o wymiarach prędkości, możemy napisać krótko

$$V_k = -\frac{dS_k}{dt}, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{393}$$

Związek ten, który jest poprostu bezpośrednim wyrazem tak zwanego „różniczkowego“ prawa indukcyi Faraday'a *, zachodzi bez wszelkich dodatkowych zastrzeżeń, t. j. zarówno dla pól zmieniających się powolnie jak i dla pól bardzo szybko zmiennych. Drugie równanie Maxwellowskie, które oznaczaliśmy stale przez (B), t. j. $\mathbf{q} = -c.curl\,\mathbf{E}$, zaś w razie istnienia siły przyłożonej równanie (B'), t. j. $\mathbf{q} = -c.curl\,(\mathbf{E} - \mathbf{e})$, wyrażało tę samą zupełnie treść dla obwodu nieskończonostkowego, na jednostkę powierzchni.

W niniejszym Rozdziale chodzi nam atoli o pola *niemal stateczne* (quasi-stacyonarne, w brzmieniu międzynarodowem), czyli zmieniające się z prędkością stosunkowo małą, a mianowicie tak małą, iż można zaniechać prądy przesunięcia $\dot{\mathbf{D}} = d\mathbf{D}/dt$, a więc też odpowiednie wiry magnetyczne w polu zewnętrznem, otaczającem n obwodów $s_1, \ldots s_n$. Innemi słowy, zakładamy, że jedynie obwody te stanowią siedlisko wirów magnetycznych czyli prądów elektrycznych o natężeniach $I_1, \ldots I_n$, i że prędkości zmian tych natężeń jakoteż prędkości zmian parametrów konfiguracyjnych, czyli krócej prędkości ruchu $\dot{x} = dx/dt$ są dostatecznie małe, aby można było zaniechać wszelkie wyrazy dodatkowe i napisać dla dowolnej chwili t wzór (385):

$$S_k = L_{k_1} I_1 + L_{k_2} I_2 + \ldots + L_{kn} I_n, \tag{385 bis}$$

rozumiejąc we wzorze tym przez $I_1, \ldots I_n$ natężenia prądów panujące w obwodach $s_1, \ldots s_n$ *w tejże samej chwili* t. Jeżeli chodzi np. o prądy peryodycznie zmienne, okres ich drgania powinien być bardzo wielki w porównaniu z czasem, w ciągu którego zaburzenia elektromagnetyczne przebywają odległość między najskrajniejszemi punktami całego układu obwodów. Warunki dla prądów, i dla odpowiednich pól, *niemal stacyonarnych* implikują więc w sposób bar-

* Porówn. Maxwella *El. and Mgnt.*, T. II, art. 541.

dzo istotny *rozmiary* samego układu. Godząc się na te warunki, a więc na przyjęcie wzoru (385) dla S_k i powyższych wyrazów (384) dla spółczynników L, postępujemy tak, jak gdyby w granicach przestrzennych rozważanego układu zjawiska odbywały się według klasycznej teoryi „chwilowego działania na odległość“. To też wyniki, które otrzymuje się przy tych założeniach, nie różnią się w niczem od wyników teoryi dawniejszej. Zwolennicy teoryi Maxwella są atoli świadomi owych wyrazów zaniechanych i wiedzą, że wyniki te mają znaczenie przybliżeń. Zbytecznem chyba byłoby rozwodzić się nad tem, że w praktyce elektrotechnicznej (z wyjątkiem telegrafii bez drutu) ów stopień przybliżenia jest aż nadto wystarczający.

Podstawiając tedy za S_k powyższy wyraz (385), otrzymuje się według (393) dla całkowitej *S. E. M.* (c^{-1}) wzbudzonej w obwodzie s_k:

$$V_k = -\frac{d}{dt}\sum_i L_{ki} I_i = -\sum_i \left(L_{ki}\frac{dI_i}{dt} + I_i \frac{dL_{ki}}{dt}\right). \quad (394)$$

Wyraz dL_{kk}/dt zależy od prędkości, z jaką zmieniają się kształty i rozmiary samego obwodu s_k, zaś dL_{ki}/dt od prędkości zmian położenia i oryentacyi innych obwodów lub ich części względem obwodu s_k. Mamy mianowicie, dla k, i równych lub różnych:

$$\frac{dL_{ki}}{dt} = \sum_x \frac{\partial L_{ki}}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \sum_x \frac{\partial L_{ki}}{\partial x}\dot{x}, \quad (395)$$

gdzie suma obejmuje wszystkie parametry konfiguracyjne x, lub te tylko, które zmieniają się z czasem. w danej chwili. Druga część V_k w (394) jest więc *funkcyą liniową prędkości ruchu układu*, o spółczynnikach proporcyonalnych do natężeń prądów i oprócz tego zależnych jedynie od konfiguracyi układu i zawierających czynnik μ. Ta część S. E. M. wzbudzonej zmienia swój kierunek przy odwróceniu wszystkich prędkości ruchu. Pierwsza część natomiast jest *funkcyą liniową prędkości zmian natężeń prądów*, o spółczynnikach L.

Ze względu na dodajniki odpowiadające różnym obwodom powiemy, że całkowita S. E. M. wzbudzona w obwodzie s_k jest sumą algebraiczną siły elektromotorycznej

$$(394a) \qquad V_{kk} = -\frac{d}{dt}(L_{kk} I_k) = -L_{kk}\frac{dI_k}{dt} - I_k \frac{dL_{kk}}{dt}$$

spowodowanej przez zmiany własności geometrycznych samego obwodu s_k i natężenia płynącego w nim prądu, oraz $n - 1$ sił elektromotorycznych

(394b) $$V_{ki} = -\frac{d}{dt}(L_{ki}I_i),\ k \neq i$$

odpowiadających zmianom natężeń we wszystkich innych obwodach i ruchom ich względem s_k.

V_{kk} nazywa się S. E. M. *samoindukcyi* w obwodzie s_k, zaś V_{ki} dla k, i różnych S. E. M. *indukcyi wzajemnej* (w s_k) między obwodami s_i i s_k.

Jeżeli $I_i = \text{const.}$, mamy $V_{ki} = -I_i dL_{ki}/dt$; podobnie też mamy dla obwodu s_i, jeżeli $I_k = \text{const.}$: $V_{ik} = -I_k dL_{ik}/dt$; lecz $L_{ik} = L_{ki}$; jeżeli więc $I_k = I_i$, mamy:

$$V_{ik} = V_{ki}\ ,$$

co czytelnik sam wyrazi słowami.

Dla każdego obwodu *sztywnego* mamy

$$V_{kk} = -L_{kk}\frac{dI_k}{dt}\ ;$$

ponieważ zaś $L_{kk} > 0$, przeto dla I_k rosnącego kierunek V_{kk} jest wprost przeciwny dodatniemu kierunkowi wiru magnetycznego czyli prądu w obwodzie s_k; dla I_k malejącego kierunki te są zgodne.

§ 113. ***Układ prądów jako dynamiczny układ policykliczny.*** — Ponieważ energia $U(I)$ jest jednorodną, kwadratową funkcyą natężeń, mamy

$$\sum_k \frac{\partial U(I)}{\partial I_k} I_k = 2U_m = \sum S_k I_k\ ,\ \text{według (382)},$$

a więc, zupełnie podobnie do wzoru elektrostatycznego (204):

(396) $$S_k = \frac{\partial U(I)}{\partial I_k},\ k = 1, 2, \ldots n.$$

Możemy przeto napisać dla siły elektromotorycznej wzbudzonej w obwodzie s_k, zamiast (393):

(a) $$V_k = -\frac{d}{dt}\frac{\partial U(I)}{\partial I_k},\ k = 1, 2, \ldots n.$$

Poprzednio zaś, w § 111, widzieliśmy, że wszystkie siły ponderomotoryczne X odpowiadające parametrom konfiguracyjnym x tegoż układu wywodzą się z tej samej funkcyi $U(I)$, a mianowicie według wzoru:

(b) $$X = \frac{\partial U(I)}{\partial x}\ .$$

Otóż w tych wyrazach (*a*), (*b*) sił elektro- i ponderomotorycznych przejawia się wybitna i głęboka analogia do *Lagrange*'owskich równań różnichkowych ruchu układu dynamicznego, analogia, zauważona po raz pierwszy przez Maxwella i która nasunęła mu myśl zbudowania i posłużyła za podstawę jego „Dynamicznej teoryi elektromagnetyzmu". *

Niechaj q będzie jednym z parametrów wzajemnie niezależnych q_1, q_2 i t. d., określających konfiguracyę układu mechanicznego, zaś

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}$$

prędkością zmiany tegoż parametru. Energię kinetyczną tego układu jako funkcyę kwadratową jednorodną samych prędkości $\dot{q}$, o spółczynnikach zależnych jedynie od parametrów q, oznaczmy przez $T(\dot{q})$. Wyrazem pracy mechanicznej, którą wykonywa układ przy przesunięciach wirtualnych δq niechaj będzie $\sum Q\delta q$, tak iż Q jest siłą mechaniczną (w uogólnionem znaczeniu słowa), wywieraną przez układ i dążącą ku zwiększeniu odpowiedniego parametru q. Wówczas zachodzą równania Lagrange'a, w tak zwanej drugiej postaci:

$$Q = \frac{\partial T(\dot{q})}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}}. \qquad (397)$$

Otóż, przypuśćmy, że pewne z pośród parametrów q, które oznaczymy przez q_a, nie wchodzą do wyrazu energii kinetycznej, lecz że występują w nim tylko ich prędkości $\dot{q}_a$, i że prędkości $\dot{q}_b$ pozostałych parametrów q_b, powolnie zmiennych, nie wchodzą do wyrazu tej energii, lecz występują w nim jedynie tylko same parametry q_b. Innemi słowy: przypuśćmy, że energia kinetyczna układu jest funkcyą jednorodną 2-go stopnia *samych tylko prędkości* $\dot{q}_a$ *o spółczynnikach zawierających same tylko parametry* q_b.

Wówczas będziemy mieli dwa różne rodzaje sił Q: pierwsze, odpowiadające parametrom q_a będą:

$$Q_a = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_a}, \qquad (a')$$

---

* Taki jest tytuł Rozdziału VI, części czwartej *El. and Mgnt.*, T. II; w tym i w następnym Rozdziale omówione są powyższe stosunki w formie nader pociągającej. Klasyczna rozprawa Maxwella: *A dynamical theory of the electromagnetic field*, Lond. Roy. Soc. (1865 r.) poprzedziła zresztą pierwsze wydanie jego książki o lat ośm.

drugie zaś, odpowiadające parametrom q_b:

$$(b') \qquad Q_b = \frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}_b} .$$

Porównywając przeto (a) i (a'), (b) i (b') widzimy, że siły Q_b odpowiadają zupełnie siłom *ponderomotorycznym* X, zaś siły Q_a siłom *elektromotorycznym* V_k w układzie niemal statecznym obwodów prądu elektrycznego czyli pierścieni wirowych magnetycznych.

W analogii tej, energii kinetycznej $T = T(\dot{q})$ odpowiada energia magnetyczna $U_m = U(I)$, którą też Maxwell ze względu na to nazwał *energią elektrokinetyczną;* parametrom powolnie zmiennym q_b odpowiadają parametry konfiguracyjne x, jak założyliśmy, również powolnie zmienne; prędkościom $\dot{q}_a$ odpowiadają natężenia prądów czyli momenty wirów I_k.

Własności takich układów zbadał *Helmholtz* w szeregu znakomitych rozpraw *, których głównym celem były zastosowania do termodynamiki. Parametry szybko zmienne q_a nazwał on *spółrzędnemi cyklicznemi* ze względu na to, iż zmianom ich odpowiadają ruchy kołowe („in sich zurücklaufende Bewegungen"), przy których zewnętrzna postać układu pozostaje niezmienna lub w przybliżeniu niezmienna; kąt obrotu koła rozpędowego stanowiłby np. spółrzędną cykliczną; do wyrazu energii nie wchodzi sama ta spółrzędna lecz tylko jej prędkość, tak zwana *prędkość cykliczna*, a więc np. nie kąt obrotu, lecz tylko prędkość obrotu koła rozpędowego. Układ zawierający jedyną tylko spółrzędną cykliczną niezależną nazywa się, według Helmholtza, *monocyklicznym;* przy dwóch takich zmiennych, wzajemnie niezależnych, mówi się o *bicyklu* czyli o układzie *bicyklicznym*, w ogóle zaś o układzie *policyklicznym*.

Układ niemal stateczny złożony z n obwodów prądu elektrycznego czyli równoważnych wirów magnetycznych jest więc, dynamicznie, układem *n-cyklicznym*. Jedyny obwód stanowi monocykl.

Dla jednego i dla dwóch obwodów prądu zbudował *Boltzmann* modele mechaniczne, które jaknajgorliwiej polecam uwadze czytelnika, pragnącego oswoić się z treścią powyższej analogii. **

---

* *H. v. Helmholtz*: *Studien zur Statik monocyklischer Systeme;* Berl. Akad. d. Wiss. 1884. *Principien der Statik monocyklischer Systeme;* Borchardt-Crelle's Journal f. Mathematik, T. 97, 1884. Prace te, w postaci pięciu nawiązujących się wzajemnie rozpraw przedrukowano w tomie III pism zbiorowych Helmholtza: *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Lipsk, u J. A. Bartha, 1895.

** *L. Boltzmann*: *Vorlesungen üb. Maxwells Theorie d. Electrizität u. d. Lichtes*, 2 Teile, 1891—93; patrz. część 1-ą. Model bicykliczny powinienby znaleść się na stole demonstracyjnym przy najelementarniejszych nawet wykładach omawianego działu fizyki.

Energię T można też wyrazić jako połowę sumy iloczynów prędkości i *momentów kinetycznych* p:

$$T = \tfrac{1}{2} \sum \dot{q} p \ ,$$

a wzorowi temu odpowiada $U_m = \frac{1}{2} \sum I_k S_k$. Podobnie do (396), § 113, mamy

$$p = \frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \ ;$$

indukcya magnetyczna S_k przez obwód s_k odpowiada tedy zupełnie momentowi kinetycznemu; dla tego też Maxwell nazwał wielkość S_k

$$S_k = L_{k1} I_1 + \ldots + L_{kn} I_n$$

momentem elektrokinetycznym odpowiedniego obwodu prądu. Spółczynniki L_{kk} odpowiadają dynamicznym *momentom bezwładności*, zaś L_{ki} $(k \neq i)$ tak zwanym „iloczynom bezwładnościowym“, t. j. spółczynnikom kwadratów, względnie iloczynów prędkości w wyrazie energii kinetycznej $T(\dot{q})$. Jedne i drugie spółczynniki zależą od parametrów konfiguracyjnych powolnie zmiennych.

§ 114. *Równania różniczkowe dla n obwodów sztywnych, nieruchomych.* — Dla układu takiego spółczynniki samoindukcyi i indukcyi wzajemnej są stałe, tak iż według (394) mamy

$$V_k = - \sum_i L_{ki} \frac{dI_i}{dt} \ . \qquad (398)$$

Przypomnijmy sobie z §-fu 112, że V_k nie jest niczem innem jak całką

$$V_k = c \int (\mathbf{E} - \mathbf{e}) d\mathbf{s}_k$$

rozciągniętą wzdłuż obwodu s_k. Wektor $\mathbf{e}$ jest siłą elektryczną przyłożoną, która może być termoelektryczną, woltaiczną lub innego pochodzenia; oznaczmy całkowitą S. E. M. przyłożoną, dla obwodu s_k, przez A_k, t. j. połóżmy

$$A_k = \int \mathbf{e} d\mathbf{s}_k \ ;$$

wówczas będzie

$$\frac{1}{c} V_k + A_k = \int \mathbf{E} d\mathbf{s}_k .$$

Zastosujmy teraz do jednego z obwodów s_k równanie różniczkowe (Ia), § 18, zakładając, że można zaniechać prąd przesunięcia $\dot{\mathbf{D}}$; założenie to uczynimy tu dla każdego z n obwodów stanowiących układ *. Napiszemy więc

$$\lambda \mathbf{E} = c.curl\, \mathbf{M} ,$$

gdzie λ jest spółczynnikiem przewodnictwa. Pomnóżmy równanie to skalarnie przez $d\mathbf{s}_k$ i przez przekrój poprzeczny σ obwodu czyli włókna s_k; ponieważ I_k jest momentem tego włókna wirowego, otrzymamy

$$\sigma.curl\, \mathbf{M}.d\mathbf{s}_k = I_k ds_k ,$$

a więc

$$\int \mathbf{E} d\mathbf{s}_k = c I_k \int \frac{ds_k}{\lambda \sigma} .$$

Kładąc

$$c^2 \int \frac{ds_k}{\lambda \sigma} = W_k , \tag{399}$$

a więc rozumiejąc przez W_k to, co się nazywa *oporem* całego obwodu s_k (w układzie elektromagnetycznym miar), możemy napisać krócej:

$$\int \mathbf{E} d\mathbf{s}_k = \frac{1}{c} W_k I_k ,$$

a więc

$$\frac{1}{c} W_k I_k = A_k + \frac{1}{c} V_k .$$

Mimochodem możemy tedy zaznaczyć, że *prawo Ohma* jest już zawarte, jako wypadek szczególny, w równaniu (Ia).

Podstawiając w ostatnim wzorze za V_k wartość (398) otrzymamy żądane równania układu w postaci powszechnie używanej, a mianowicie:

---

* Innemi słowy, zaniedbujemy pojemność (elektrostatyczną) każdego obwodu, a wraz z nią energię elektryczną, którą uwzględnimy dopiero w następnym paragrafie.

$$\sum_{i=1}^{i=n} L_{ki} \frac{dI_i}{dt} + W_k I_k = c.A_k; \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{400}$$

Jeżeli S. E. M. przyłożone, t. j. wielkości A_k, są dane dla każdego obwodu jako funkcye czasu, które w przypadku szczególnym mogą być stałe, natenczas mamy tu n równań różniczkowych liniowych, pierwszego rzędu. Znając więc wartości początkowe wszystkich natężeń, możemy za pomocą równań tych wyznaczyć I_1, I_2, ... I_n dla wszelkich czasów.

Rozwiązanie tych równań, szczególniej dla *peryodycznych* S. E. M. przyłożonych, pozostawiam czytelnikowi, w myśl uwagi zamieszczonej na końcu poprzedniego Rozdziału. Dobrze jest zacząć od wypadku, w którym układ jest pozostawiony „samemu sobie“, t. j. $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$; wówczas równania (400) stają się jednorodnemi. Dla ułatwienia oryentacyi czytelnik może założyć $n = 2$, a przyjmując np. $A_2 = 0$, A_1 proporcyonalne do $\sin mt$, $m = const.$, znajdzie już w odpowiednich rozwiązaniach dość wiele zajmującego materyału do dyskusyi.

Według określeń §-fu 59 wydajność źródła energii elektrycznej na jednostkę objętości jest $\mathbf{pe} = c\,\mathbf{e}\,curl\,\mathbf{M}$, a więc dla całego obwodu czyli włókna s_k:

$$cI_k \cdot \int \mathbf{e} d\mathbf{s}_k = c.A_k I_k \; ;$$

otóż mnożąc równania (400), dla $k = 1, 2, \ldots n$, odpowiednio przez I_1, I_2, ... I_n i dodając wszystkie do siebie, otrzymamy

$$\sum_k \sum_i L_{ki} I_k \frac{dI_i}{dt} + \sum W_k I_k^2 = c \sum A_k I_k \; ;$$

ponieważ zaś spółczynniki L mają być stałe, suma podwójna jest pochodną zupełną ze względu na czas energii magnetycznej czyli elektrokinetycznej $U(I) = U_m$, tak iż będzie

$$c \sum A_k I_k = \frac{dU_m}{dt} + \sum W_k I_k^2 \; , \tag{401}$$

czyli: energia dostarczana przez wszystkie źródła = przyrostowi energii całego pola magnetycznego + ciepło Joule'a wytwarzane w obwodach, wszystko na jednostkę czasu.

(401) jest więc wyrazem zasady zachowania energii. Pamiętajmy bowiem, że spółczynniki L miały być stałe, tak iż układ nie wykonywa żadnej pracy mechanicznej. W wypadku ogólniejszym (obwodów ruchomych i odkształcalnych), w którym układ wykonywa,

na jednostkę czasu, pracę mechaniczną $\sum X\dot{x} = \sum \frac{\partial U(I)}{\partial x}\frac{dx}{dt}$, według (387), sprawdzimy łatwo, że

$$c\sum A_k I_k = \frac{dU_m}{dt} + \sum W_k I_k^2 + \sum X\dot{x} \quad (402)$$

t. j. że zasadzie energii znowu staje się zadość.

Jeżeli układ składa się z *jednego* tylko obwodu sztywnego, mamy według (401)

$$cAI = \frac{dU_m}{dt} + WI^2 \quad (401a)$$

gdzie $U_m = \frac{1}{2}LI^2$, skoro L jest spółczynnikiem samoindukcyi czyli, jak się mówi krótko, „samoindukcyą", zaś W oporem tego obwodu.

W tym wypadku samo już to równanie energii wystarcza do napisania równania różniczkowego dla I; istotnie, ponieważ $\dot{U}_m = LI\dot{I}$, mamy, dzieląc (401a) obustronnie przez I:

$$L\dot{I} + WI = cA \quad (400a)$$

jak byłoby według (400) dla $n = 1$.

Z uwagi tej skorzystamy w następnym §, w którym oprócz magnetycznej wypadnie nam uwzględnić energię elektryczną.

Przy nieobecności S. E. M. przyłożonej, którą odtąd będę krótko nazywał S. E. M. bez wszelkich epitetów, ostatnie równanie staje się jednorodnem, a mianowicie:

$$L\dot{I} + WI = 0 \quad (400b)$$

tak iż

$$I = I_0 e^{-Wt/L} \quad (403)$$

gdzie e jest zasadą logarytmów naturalnych, zaś I_0 wartością I w chwili $t = 0$. Czas L/W, po upływie którego I spada na e-tą część pierwotnej swej wartości, nazywa się *stałą czasową* lub czasem relaksacyjnym danego obwodu. Ponieważ według powyższych określeń W posiada wymiary prędkości, zaś L wymiary długości, przeto iloraz LW^{-1} jest istotnie czasem.

Samoindukcyę L, która utrudnia niejako rozpraszanie czyli przekształcanie się energii układu na ciepło, można więc porównać z masą czyli bezwładnością, zaś opór elektryczny, sprzyjający temu procesowi, ze spółczynnikiem tarcia odpowiedniego układu dynamicznego, monocyklicznego. Uogólnienie tej uwagi do wielu obwodów

i do odpowiedniego układu policyklicznego nie sprawia żadnej trudności.

Jeżeli S. E. M. jest prostą funkcyą peryodyczną czasu, powiedzmy

$$cA = B.sin(\nu t),$$

tak iż $\frac{2\pi}{\nu}$ jest jej okresem drgania, natenczas mamy

$$L\dot{I} + WI = B.sin(\nu t) . \qquad (400c)$$

Całkę ogólną tego równania niejednorodnego otrzymuje się, biorąc sumę całki ogólnej (403) równania zredukowanego i całkę szczególną

$$I = a\,sin(\nu t - \gamma) \qquad (404)$$

równania (400c); po dość długim czasie (403) zamiera, tak iż możemy ograniczyć się do (404). Podstawiając wyraz ten do równania (400c), otrzymamy dla stałych a, γ

$$tg\gamma = \frac{\nu L}{W};\ a = \frac{B\cos\gamma}{W} = \frac{B}{\sqrt{W^2+\nu^2L^2}}, \qquad (405)$$

tak iż będzie ostatecznie

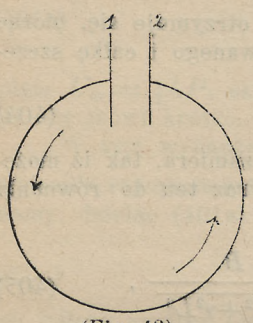
$$I = \frac{B}{W}\cos\gamma.sin(\nu t - \gamma). \qquad (404')$$

Zachodzą tedy tak zwane drgania nieswobodne czyli *wymuszone* prądu I o okresie równym okresowi S. E. M.; różnica *faz* określona przez γ jest tem większa, im dłuższy jest czas relaksacyjny obwodu w stosunku do okresu drgań. Dla $\nu = 0$, t. j. dla niezmiennej S. E. M., byłoby $IW = B$, czyli $a : B = 1 : W$, jak w zwykłem prawie Ohma. Dzięki drganiom S. E. M. *stosunek amplitud* prądu i S. E. M. staje się mniejszym niż $1 : W$, a to tem bardziej, im szybsze są drgania. Zamiast zwykłego oporu mamy wielkość $\sqrt{W^2+\nu^2L^2}$, która nosi miano *impedancyi*.

§ 115. ***Uwzględnienie pojemności obwodu. Drgania własne (swobodne) i drgania wymuszone.*** — Zjawisko rozważone pod koniec poprzedniego paragrafu, w nieobecności S. E. M. zasilającej obwód, polegało według (403) na monotonnym, aperyodycznym zaniku wiru magnetycznego czyli prądu elektrycznego. Skoro jednak włączymy do obwodu *kondensator* (czyli ogólniej, skoro uwzględnimy pojemność elektrostatyczną obwodu), zjawisko rozwijać się będzie, przy spełnieniu pewnych jeszcze warunków dodatkowych, w sposób zupełnie inny, bardziej urozmaicony, przedstawiając się

mianowicie w postaci szeregu *drgań* o pewnym okresie zależnym od własności samego układu. Amplituda ich, w braku S. E. M., maleje z czasem. Do swobodnych tych czyli własnych drgań obwodu przyłączają się znowu, w obecności S. E. M., drgania (lub w ogóle zmiany) *wymuszone*, o okresie narzuconym wprawdzie układowi przez ów czynnik zewnętrzny, o fazie jednak i stosunkowej amplitudzie zależnych w istotny sposób od własności obwodu.

Niechaj tedy okładki kondensatora o pojemności C będą połączone drutem o oporze W i samoindukcyi L; pojemność łącznika niechaj będzie znikoma w porównaniu z C, tak iż C będzie pojemnością całego układu. Ładunek okładki 1, w danej chwili t jakiejkolwiek, oznaczmy przez q (aby zachować „e“ dla oznaczenia zasady log. nat.), ładunek okładki 2 będzie więc jednocześnie $-q$. Jako kierunek *dodatni* obwodu a raczej prądu lub włókna wirowego obierzmy umownie kierunek



(Fig. 42).

(a) $1 \longrightarrow drut \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$. (Fig. 42).

Prąd przesunięcia elektrycznego między okładkami stanowi dalszy ciąg prądu przewodzonego w drucie; całość stanowi pierścień wirowy magnetyczny o jednym i tym samym (w danej chwili) momencie I, który możemy też uważać jako miarę natężenia prądu. Niechaj wreszcie A oznacza znowu S. E. M. (przyłożoną), daną jako funkcya czasu.

W tych warunkach, oprócz energii magnetycznej czyli elektrokinetycznej $U_m = \frac{1}{2}LI^2$ mamy jeszcze energię elektryczną pola zawartego między okładkami $U_e = \frac{1}{2}q^2/C$. Równanie energii będzie przeto, w założeniu oczywiście, że układ jest sztywny, t. j. nie pracuje mechanicznie:

$$cAI = LI\dot{I} + C^{-1}q\dot{q} + WI^2.$$

Lecz według pierwszego prawa zasadniczego $\dot{\mathbf{D}} = c.curl\,\mathbf{M}$, w zastosowaniu do izolatora zawartego między okładkami, i według konwencyi (a) jest:

$$\dot{q} = -cI. \tag{406}$$

Wprowadzając więc związek ten do ostatniego równania i dzieląc je obustronnie przez I, otrzymamy

$$L\dot{I} + WI - cC^{-1}q = cA$$

czyli dla q równanie różniczkowe liniowe, drugiego rzędu:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+W\frac{dq}{dt}+\frac{c^2}{C}q=-c^2A. \tag{407}$$

A ma być daną funkcyą czasu, dla wszelkich t; jeżeli więc przepiszemy początkowe wartości q i $\dot{q}$, czyli według (406), *początkowy ładunek i początkowe natężenie prądu*, cały przebieg zjawiska będzie jednoznacznie określony.

Zresztą, różniczkując (407) ze względu na t i korzystając znowu z (406), otrzymamy dla I podobne równanie różniczkowe jak dla q, a mianowicie

$$L\ddot{I}+W\dot{I}+c^2C^{-1}I=c\dot{A}, \tag{408}$$

gdzie $\dot{A}$, jako pochodna A, jest również *daną* funkcyą czasu.

Drgania własne. — Jeżeli $A=0$, mamy równanie jednorodne

$$L\ddot{q}+W\dot{q}+c^2C^{-1}q=0, \tag{407a}$$

a więc jako całkę ogólną

$$q=a_1e^{n_1t}+a_2e^{n_2t}, \tag{409}$$

gdzie e jest zasadą logarytmów naturalnych, a_1, a_2 stałemi dowolnemi, które należy wyznaczyć z warunków początkowych, zaś n_1, n_2 pierwiastkami równania

$$n^2+\frac{W}{L}n+\frac{c^2}{CL}=0,$$

czyli

$$\frac{n_1}{n_2}=-\frac{W}{2L}\pm\frac{1}{2L}\sqrt{W^2-\frac{4c^2L}{C}}.$$

Jeżeli jest $W^2>4c^2L/C$, obadwa pierwiastki n_1, n_2 są rzeczywiste i ujemne, tak iż według (409) mamy znowu ustawiczny, aperyodyczny zanik ładunku i prądu, jak w obwodzie pozbawionym pojemności.

Charakter zjawiska nie zmienia się też zasadniczo, gdy mamy $W^2=4c^2L/C$; wówczas jest $n_1=n_2=-W/2L$, a więc

$$q=(a_1+a_2t)e^{-Wt/2L}.$$

Jeżeli natomiast opór jest stosunkowo mały, lub iloraz samoindukcyi i pojemności stosunkowo wielki, a mianowicie tak, iż

$$W^2<4c^2L/C, \tag{410}$$

natenczas pierwiastki n_1, n_2 stają się zespolonemi, wzajemnie sprzężonemi; rozumiejąc przez α, β dwie stałe dowolne, otrzymamy wówczas według (409):

$$q = \alpha . e^{-Wt/2L} \cos(\nu_0 t + \beta) , \tag{411}$$

gdzie

$$\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{2L}\sqrt{4c^2\frac{L}{C} - W^2} \tag{412}$$

jest według (410) wielkością *rzeczywistą*. W tym wypadku mamy więc *drgania* proste harmoniczne, o okresie $T_0 = 2\pi/\nu_0$, których amplituda maleje z czasem, proporcyonalnie do funkcyi wykładniczej

$$e^{-Wt/2L} ,$$

a więc tak zwane drgania zanikające, o *spółczynniku tłumienia* równym $W/2L$, czyli o *dekremencie logarytmicznym* $T_0 W/2L$.

Zjawisko to jest powszechnie znane pod nazwą *oscylacyjnego wyładowania* kondensatora. Teoretycznie przewidział je *William Thomson* (1853), doświadczalnie otrzymał po raz pierwszy *W. Feddersen* (1859), którego badania miały zresztą być zupełnie niezależne od teoryi.

Co do wymiarów, zauważmy, że L (w ukł. elektromagn. miar) zarówno jak C (w ukł. elektrostat.) są długościami, zaś W i c, jak wyżej, prędkościami, tak iż T_0 według (412) istotnie jest czasem, zaś dekrement logarytmiczny $T_0 W/2L$ liczbą niemianowaną, jak być powinno.

Jeżeli W^2 daje się zaniechać wobec $4c^2 L/C$, okres drgań własnych układu staje się według (412)

$$T_0' = \frac{2\pi}{c}\sqrt{LC}, \text{ a więc } \nu_0' = c/\sqrt{LC} , \tag{412a}$$

co stanowi t. zw. „wzór Thomsona“.

Drgania wymuszone. — Niechaj teraz siła elektromotoryczna przyłożona A będzie prostą funkcyą peryodyczną czasu, o okresie T w ogóle różnym od okresu T_0 drgań własnych układu; kładąc $2\pi/T = \nu$, napiszmy znowu, jak w § 114:

$$cA = B \sin(\nu t) ;$$

wówczas równanie (408) przybierze postać

$$L\ddot{I} + W\dot{I} + c^2 C^{-1} I = \nu B \cos(\nu t) ,$$

tak iż oprócz drgań swobodnych układu, zanikających z czasem, otrzymamy drgania *wymuszone*, a mianowicie:

$$I = \frac{B\cos\gamma}{W}\sin(\nu t-\gamma) = \frac{B\sin(\nu t-\gamma)}{\sqrt{W^2+(L\nu-c^2/C\nu)^2}}, \quad (413)$$

gdzie różnica fazy drgań prądu względem drgań S. E. M. będzie wyznaczona przez:

$$tg\gamma = \frac{1}{W}(L\nu-\frac{c^2}{C\nu}). \quad (414)$$

Stosunek amplitud drgań wymuszonych i drgań S. E. M. zależy od W, L, C i od ν, a więc zarówno od okresu drgań narzuconych układowi jak i od własnych cech układu. To samo dotyczy różnicy faz.

Przy danych W, L, C stosunek amplitudy prądu I (a więc też ładunku) do amplitudy S. E. M. staje się *największym* dla $\nu L = c^2/C\nu$, czyli dla

$$\nu = \frac{c}{\sqrt{LC}}, \quad (415)$$

a więc według (412a) wówczas, gdy okres drgań S. E. M. staje się równym okresowi drgań własnych ν_0', który przysługiwałby układowi, *gdyby zaniechano jego opór* (t. j. gdyby zaniechano W^2 wobec $4c^2LC^{-1}$). Pamiętać bowiem należy, że okres własny ν_0, przysługujący rzeczywiście układowi, jest tylko w przybliżeniu określony przez wzór Thomsona. Dopóki jest ν różne od ν_0', można zaniechać W^2 po prawej stronie wzoru (413); jeżeli jednak ν staje się dokładnie równe ν_0', nie można już tego uczynić; gdybyśmy o tem zapomnieli, otrzymalibyśmy dla stosunku amplitud wartość nieskończoną. Wówczas więc należy pozostawić W^2 w (413). Podstawiając we wzorze tym za ν wartość szczególną (415), mamy $WI = B\sin(\nu t-\gamma)$; ów największy stosunek amplitud staje się więc poprostu odwrotnie proporcyonalnym do zwykłego oporu ohmicznego W. Jednocześnie zaś jest, według (414), $\gamma = 0$, a więc

$$WI = B\sin(\nu t) = cA.$$

Fazy prądu i S. E. M. są tedy w tym szczególnym wypadku zgodne ze sobą; według związku (406) różnica faz ładunku i S. E. M. wynosi więc $\frac{1}{2}\pi$.

POLITECHNIKA Biblioteka Główna GDAŃSKA

Spis alfabetyczny do tomu pierwszego.

Aberacya światła 123.
Abraham M. 242.
Acykliczna dziedzina 34.
Ampère 319, 330, 346—7.
Anizotropia 101.

Basset A. B. 300.
Bezsilny (wysił) 213.
Bicykl 352.
Bieguny funkcyi kulistej 281.
— solenoidu mgnt. 327.
Biot 346.
Boltzmann 352.
Butelka lejdejska 263.

Całka liniowa (wektora) 27.
— powierzchniowa — 29.
Całki symboliczne 149, 160.
Chemiczna energia 178.
Ciążenie powszechne 174.
Ciśnienie 205.
Ciśnienia główne 210.
Clausius 346.
Cohn E. 304.
Coulomb 192, 239, 241, 346.
curl 29.
Cykle niezależne 37.
Cykliczna dziedzina 35.
— prędkość 352.
— spółrzędna 352.
Czas relaksacyjny 138.

Dekrement logarytmiczny 360.
Derywator 40.
Diamagnetyczne ciała 101.
Dielektryk 108.
displacement (*electric*) 101.
div = *divergence* (*rozbieżność*) 30.
Doskonały izolator 116.
— przewodnik 116.
Drgania własne (swobodne) 359.
— wymuszone 360.
Dwuwymiarowe zagadnienia 297.
„Działanie na odległość“ 241.

Earnshaw'a funkcya prądowa 298.
Eichenwald A. 197.
eingeprägte Kraft 198.
Elektrodynamiczne „prawa elementarne“ 346.
Elektromotoryczna „siła“=S.E.M. 95.
Elektrony 241.
Elektrostatyka 235.
Elektryczność pozorna 105.
— prawdziwa 103.
Elipsoid dielektryczny 303.
— przewodzący 306.
Elipsoidy spółogniskowe 270.
Energia (w ogóle) 165.
— elektrokinetyczna 340, 352.
— elektromagnetyczna 186.
— elektryczna 180.
— magnetyczna 183.
„— pola“ 80.
— położenia wzajemnego 174.
Enneper 273.
„Epoka“ 153.
Eter 199.
Ewing J. A. 326.

Faraday 108, 204—5, 241, 259.
Feddersen W. 360.
Ferromagnetyczne ciała 198.
Fizyka „sił centralnych“ 241.
force of flux 226.
— *of the field* 226.
Funkcya prądowa 298, 300.

Funkcya stanu 126.
— wielowartościowa 16.
Funkcye kuliste 279.
— Laplace'a 280.
— Legendre'a (strefowe) 280.

Gauss 346.
Gęstość energii 167.
— ładunku 103—7.
Grassmann 346.
Green'a twierdzenie 58—9.

Hamilton 6, 40.
Heaviside O. 6, 122—3, 145, 151, 174, 197, 224,—6,—7, 241, 320,—5.
Helmholtz 199, 293, 352.
Hertz H. 122,—3, 241,—2.
Hutchinson C. T. 197.
Hydrostatyczny wysił 211.
Hyperboloidy spółogniskowe 276.
Hystereza magnetyczna 183.

Iloczyn skalarny (**AB**) 9.
— wektorowy (V**AB**) 12.
Impedancya 357.
impressed force 198.
Indukcya przez powierzchnię 86.
— — elektr., mgnt. 96, 102.
Indywidualna zmiana 50.
Irotacyjne pole 34.
— y wysił 207.
Iteracye (operatora) 53.
Izolator 108.
Izopotencyalne powierzchnie 39.
Izotropia 101.

Jednoosiowy operator 22.
Jednorodne (ciało) 101.
Jednostkowy wektor 6.
Jednowymiarowe zagadnienia 257.
Joule'a ciepło 140.

Kirchhoff 264,—8, 275, 300,—4.
Komórka (jednostkowa) 182.
Kondensator 248.
— kulisty 261.
— płaski 257.
Krążek dielektryczny 308.
Krytyczna prędkość (*c*) 123, 179.
Kula dielektryczna 309,
Kule spółśrodkowe 260.
Kwadryki spółogniskowe 268.

Lagrange'a równania ruchu 351.
Lamé 264, 270.
Lamela magnetyczna 328.
Laplace 54, 280.
Laplace'a równanie w spółrz. krzywoliniowych 263,—7.
Legendre 280.
Linia pola (w ogóle) 26.
— siły el., mgnt. 94.
Lokalizacya energii 166.
Lokalna zmiana 50.
Lorentz H. A. 197.
Ładunek 103.
— wzbudzony 247.

Magnes (w ogóle) 316.
— jednostajny 330.
— lamelarny 327.
— solenoidalny 326.
Magnetomotoryczna „siła“ 95.
Magnetyzm pozorny 105, 313.
— prawdziwy 103.
— wzbudzony 321,—5.
Maxwell 101, 113, 121, 196, 203,—5, 216, 236, 242,—6, 250,—3,—5,—7, 270,—9, 280,—5, 293,—5, 300, 319, 325, 338, 340,—6,—8, 351,—3.
Miękkość magnetyczna 316.
Möbius'a powierzchnia 27.
Moment elektrokinet. w punkcie 338.
— — obwodu prądu 353.
— „obrotu“ 200.
— rurki (w ogóle) 33.
— warstwy podwójnej 73.
Monocykliczny układ 352.

Napięcie 205.
Napięcia główne 210.
Natężenie wektora 6.
Neumann F. 346.
— *K.* 346.
Newton 241.
Niemal stateczne pola 348.
Niezmienniki istotne 126.
Niezupełny układ 231.

Obieg dodatni 28.
Objętość równoległościanu (AVBC) 13.
Obrazy elektryczne 292.
Odwzorowanie podobne 299.
Oersted 346.
Okładki (kondensatora) 248.
Operator Hamiltona (∇) 40—1.
— Laplace'a (∇^2) 54.
— wektorowy liniowy 17—22.
Osie elektryczne, mgnt. 101.
— główne operatora wekt. lin. 17-22.
— — wysiłu 209.

Paramagnetyczne ciała 101.
permeability 99.

Planck M. 166.
Poincaré H. 197, 241.
Poisson 301.
Pojemność (elektrostatyczna) 246.
— elipsoidu 272.
— krążka 276.
— kuli 262.
— tarczy eliptycznej 274.
Polaryzacya elektryczna (**D**) 101.
— magnetyczna (**B**) 101.
Pole (wektorowe, w ogóle) 22.
— elektr., mgnt., elmgnt. 93.
Policykliczny układ 352.
Półprzewodniki 116.
Potencyał skalarny (w ogóle) 35.
— elektryczny 96, 236.
— elektrodynamiczny 343.
— (Newtonowski) elipsoidu 304.
— magnetyczny 96, 312.
— prędkości 168.
Potencyał wektorowy (w ogóle) 76.
— Maxwellowski 338.
Poynting J. H. 187.
Praca mechaniczna pola elmgnt. 193.
Prawo Biot-Savarta 339.
— odwrotnych kwadratów 239.
— Ohma 354.
Prawoskrętny układ wektorów 13.
Prąd elektryczny 109—10.
— energii 187.
— fikcyjny (w magnesach) 320.
— konwekcyjny 113.
— magnetyczny 109—10.
— przesunięcia elektr. 113.
— przewodzony 116.
Próżnia 100, 123,—7, 199.
Przenikliwość magnetyczna (μ) 99.
Przesunięcie elektryczne 101.
Przewodniki 108, 115.
Przyłożone siły el., mgnt. (**e**, **m**) 224.

Reiff R. 346.
Riemann 346.
Röntgen W. C. 197.
— 'a prąd 113.
Rowland H. A. 197.
Rozbieżność (*div*) 30.
Równanie Laplace'a 54.
— Laplace'a—Poissona 67.
— a Maxwellowskie (pola elmgnt.) 124.
Rurki siły elektr., mgnt. 94.

Savart 346.
Siła elektryczna (**E**) 93.
— elektromotor. wzbudzona 348.
— elektromagnetyczna 196.
Siła Hertzowska 197.
— magnetyczna (**M**) 93.
— magnetoelektryczna 197.
— ponderomotoryczna 189.
— przyłożona el. (**e**), mgnt. (**m**) 224.
— — magnetyzacyi wewnętrz. 317.
— — termoelektryczna 228.
— — woltaiczna (galwaniczna) 228.
Skalar 5.
Skalarny charakter (operatora) 48.
Skok potencyału 73.
— wektora 65—6.
Solenoid magnetyczny 326.
Solenoidalne pole 32.
Sommerfeld A. 346.
Spółczynnik dielektrzyczny (*K*) 99.
Spółczynniki indukcyi (L_{ki}, L_{kk}) 90.
— elektrostatyczne indukcyjne 246
— — potencyalne 246.
Spółczynnik magnetyzacyi 325.
— przewodnictwa (λ) 116.
— tłumienia 360.
Spółrzędne biegunowe 278.
— cylindryczne 276.
— eliptyczne 268.
— krzywoliniowe ortogon. (w ogóle) 265.
Sprężystość (magnetyczna) 316.
Sprzężone operatory wekt. lin. 17.
— wysiły 207.
Stała czasowa (obwodu) 356.
Stan chwilowy (układu, pola) 125.
Statyczne pola (el., mgnt.) 94.
Stokes'a funkcya prądowa 300.
— twierdzenie 29.
stress 204.
Suma wektorów 7.
Superpozycya (pól) 132.
susceptibility 325.
Symetrya osiowa 300.
Symetryczny operator wekt. lin. 18.
— wysił 211.

Tarcza eliptyczna 274.
Taylor'a szereg 24.
Tensor 6.
Termoelektryczna siła 228.
Thomson W. (*Kelvin*) 293, 360.
Twarde (magnetycznie) ciało 316.

Układ zupełny (niezakłócony) 230.

Walce spółosiowe 263.
Warstwa podwójna 73.
— przejściowa 136.
Weber H. 264, 268.
— *W.* 319, 346.

Wektor (w ogóle) 5.
— Poyntinga 187.
Wir (pola, w ogóle) 33.
— elektryczny 95.
— magnetyczny 95.
Wirtualne przesunięcie 193.
Witkowski A. W. 275, 282.
Włókno wirowe 85.
„Wyczerpanie" energii grawitacyjnej 174.
Wydajność źródła (energii) 224.
Wyładowanie oscylacyjne (kondensatora) 360.
Wysił (w ogóle) 205.
— elektromagnetyczny 215.
— grawitacyjny 255.
Wzajemna energia 80.
Wzór Thomsona 360.

Zakłócony układ 231.
Źródło energii 224.
— rurek pola 83.
— zaburzeń elektromagnetycznych 228.

POLITECHNIKA Biblioteka Główna GDAŃSKA

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ
Magazyn Biblioteki Głównej
BG ZZ 050877-01-00/01